

CURSO DE TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS

H. FALOMIR

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS - UNLP

Notas sobre Integrales Funcionales en Mecánica Cuántica y Teoría Cuántica de Campos

1. INTEGRALES FUNCIONALES EN MECÁNICA CUÁNTICA

Consideremos un sistema cuántico de un único grado de libertad descrito por el par de operadores conjugados P y Q ,

$$(1.1) \quad [P, Q] = -i\hbar,$$

cuya evolución temporal está determinada por el operador Hamiltoniano

$$(1.2) \quad H(P, Q) = \frac{P^2}{2m} + V(Q).$$

Los operadores P y Q tienen *sistemas completos de autovectores*,

$$(1.3) \quad \begin{aligned} P|p\rangle &= p|p\rangle, \quad p \in \mathbb{R}, & \mathbf{1} &= \int dp \, |p\rangle\langle p|, \\ Q|q\rangle &= q|q\rangle, \quad q \in \mathbb{R}, & \mathbf{1} &= \int dq \, |q\rangle\langle q|, \end{aligned}$$

que satisfacen

$$(1.4) \quad \langle p'|p\rangle = \delta(p - p'), \quad \langle q'|q\rangle = \delta(q - q'), \quad \langle q|p\rangle = \frac{e^{\frac{i}{\hbar}pq}}{\sqrt{2\pi\hbar}}.$$

Estamos interesados en la amplitud de probabilidad de transición entre un estado inicial caracterizado por el vector a $|q_{inicial}\rangle$ a tiempo $t_{inicial}$ y un estado final correspondiente a $|q_{final}\rangle$ a tiempo t_{final} , la cual, para un potencial independiente del tiempo y en la representación de Schrödinger, está dada por

$$(1.5) \quad \langle q_{final}, t_{final} | q_{inicial}, t_{inicial} \rangle := \langle q_{final} | e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_{final} - t_{inicial})} | q_{inicial} \rangle.$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ y $\Delta t = (t_{final} - t_{inicial})/N$. Teniendo en cuenta que

$$(1.6) \quad e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_{final} - t_{inicial})} = \prod_1^N e^{-\frac{i}{\hbar}H \Delta t}$$

Actualizado el 5 de mayo de 2006.

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

y las relaciones de completitud, Eq. (1.3), podemos escribir

$$\begin{aligned}
 & \langle q_{final}, t_{final} | q_{inicial}, t_{inicial} \rangle = \\
 (1.7) \quad & = \int dq_1 \dots \int dq_{N-1} \langle q_N | e^{-\frac{i}{\hbar} H \Delta t} | q_{N-1} \rangle \times \\
 & \times \langle q_{N-1} | e^{-\frac{i}{\hbar} H \Delta t} | q_{N-2} \rangle \dots \langle q_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} H \Delta t} | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-\frac{i}{\hbar} H \Delta t} | q_0 \rangle,
 \end{aligned}$$

donde hemos llamado $q_0 = q_{inicial}$ y $q_N = q_{final}$.

Como $\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta t = 0$, cada factor en el integrando del segundo miembro satisface

$$(1.8) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \langle q_{n+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} H \Delta t} | q_n \rangle = \delta(q_n - q_{n+1}),$$

de modo que podemos suponer que, para $N \gg 1$, ese elemento de matriz es apreciablemente no nulo sólo para valores de q_{n+1} en un entorno de q_n .

Empleando la fórmula de Hausdorff,

$$(1.9) \quad e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} + \dots,$$

donde los puntos suspensivos representan términos cúbicos y de orden superior en A y B , podemos escribir

$$\begin{aligned}
 & e^{-\frac{i}{\hbar} H \Delta t} = \\
 (1.10) \quad & e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{P^2}{2m} \Delta t} e^{-\frac{i}{\hbar} V(Q) \Delta t} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{-i \Delta t}{\hbar} \right)^2 \left[\frac{P^2}{2m}, V(Q) \right]} + \dots,
 \end{aligned}$$

donde ahora los puntos suspensivos representan términos de orden $(\Delta t)^3$ (es decir, $O(N^{-3})$) o superior.

En esas condiciones, suponiendo que $V(q)$ sea una función suave de su argumento, podemos adoptar la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned}
 \langle q_{n+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} H \Delta t} | q_n \rangle &= \\
 &= \langle q_{n+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{P^2}{2m} \Delta t} e^{-\frac{i}{\hbar} V(Q) \Delta t} | q_n \rangle (1 + O(N^{-2})) = \\
 (1.11) \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_n \langle q_{n+1} | p_n \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p_n^2}{2m} \Delta t} \langle p_n | q_n \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} V(q_n) \Delta t} (1 + O(N^{-2})) = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_n (q_{n+1} - q_n)} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p_n^2}{2m} \Delta t} e^{-\frac{i}{\hbar} V(q_n) \Delta t} (1 + O(N^{-2})) = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \left\{ p_n \left(\frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t} \right) - H(p_n, q_n) \right\} \Delta t} (1 + O(N^{-2})),
 \end{aligned}$$

donde hemos empleado la Eq. (1.4) y

$$(1.12) \quad H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

es el Hamiltoniano clásico del sistema.

Reemplazando en la Ec. (1.7) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \langle q_{final}, t_{final} | q_{inicial}, t_{inicial} \rangle &= \int dq_1 \dots \int dq_{N-1} \int dp_0 \dots \int dp_{N-1} \\
 (1.13) \quad &e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \{ p_n \dot{q}_n - H(p_n, q_n) \}} (1 + O(N^{-1})),
 \end{aligned}$$

donde hemos llamado $\dot{q}_n = (q_{n+1} - q_n)/\Delta t$. Téngase en cuenta que en el producto de N factores de la forma $(1 + O(N^{-2}))$ hay N términos de orden $O(N^{-2})$, origen de la corrección de orden $O(N^{-1})$.

Nótese que la suma en el exponente corresponde a la *acción clásica* (en la formulación hamiltoniana)

$$(1.14) \quad S[q(t)] := \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} dt \{ p(t) \dot{q}(t) - H(p(t), q(t)) \},$$

de una trayectoria en el espacio de fase en la que la partícula une los puntos q_n y q_{n+1} en un intervalo de tiempo Δt con velocidad constante, manteniendo valores constantes de la variable conjugada, $p = p_n$, en cada intervalo de tiempo (siempre

que pueda despreciarse la variación del potencial $V(q)$ en cada tramo de la trayectoria). Por su parte, las integrales sobre las variables $q_1, \dots, q_{N-1}, p_0, \dots, p_{N-1}$ corresponden a sumar las contribuciones de la totalidad de tales trayectorias.

El límite para $N \rightarrow \infty$ del segundo miembro de la anterior ecuación se indica formalmente como

$$(1.15) \quad \langle q_{final}, t_{final} | q_{inicial}, t_{inicial} \rangle = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} dt \{p(t) \dot{q}(t) - H(p(t), q(t))\}},$$

lo que se interpreta como una suma de contribuciones correspondientes a la exponencial de $\frac{i}{\hbar}$ veces la acción clásica de aquellas trayectorias del espacio de fase, $(p(t), q(t))$, que unen los puntos $q_{inicial}$ y q_{final} en el intervalo de tiempo $(t_{final} - t_{inicial})$ y que, para todo valor de $N \in \mathbb{N}$, son *rectificables* en el anterior sentido.

1.1. Integrales de camino en el espacio de configuración. Las variables p_n pueden ser eliminadas de la Ec. (1.13) mediante integración, lo que equivale a calcular los elementos de matriz $\langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{P^2}{2m} \Delta t} | q \rangle$. Para ello debemos considerar expresiones de la forma de integrales de Fourier,

$$(1.16) \quad I(\Delta q) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \left(p_n \Delta q - \Delta t \frac{p_n^2}{2m} \right)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik\Delta q} e^{-\frac{i\hbar\Delta t}{2m} k^2},$$

donde $\Delta q = q_{n+1} - q_n$.

Pero como

$$(1.17) \quad \left| e^{-\frac{i\hbar\Delta t}{2m} k^2} \right| = 1, \quad \forall k \in \mathbb{R},$$

la anterior expresión debe ser entendida como la transformada de Fourier de la *distribución regular*

$$(1.18) \quad e^{-\left(\frac{i\hbar\Delta t}{2m}\right) k^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} e^{-\left(\frac{i\hbar\Delta t(1-2i\varepsilon)}{2m}\right) k^2},$$

donde la convergencia débil del segundo miembro está garantizada por la convergencia uniforme en cada compacto sobre la recta real. Teniendo en cuenta la

continuidad de la Transformación de Fourier respecto de la convergencia débil, podemos escribir

$$\begin{aligned}
 (1.19) \quad I(\Delta q) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik\Delta q} e^{-\left(\frac{i\hbar\Delta t}{2m}\right) [(1-i\varepsilon)k]^2} = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (1+i\varepsilon) \int_{-(1-i\varepsilon)\infty}^{(1-i\varepsilon)\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} e^{i\kappa\Delta q(1+i\varepsilon)} e^{-\left(\frac{i\hbar\Delta t}{2m}\right) \kappa^2} = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (1+i\varepsilon) \int_{-e^{-i\pi/4}\infty}^{e^{-i\pi/4}\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} e^{i\kappa\Delta q(1+i\varepsilon)} e^{-\left(\frac{i\hbar\Delta t}{2m}\right) \kappa^2},
 \end{aligned}$$

donde hemos rotado el camino de integración desde una recta que pasa por el origen con una ligera pendiente negativa a otra con pendiente -1, aprovechando que el integrando es exponencialmente decreciente sobre los arcos entre ambas.

En consecuencia, llamando $\xi = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\hbar\Delta t}{2m}} \kappa$, tenemos

$$\begin{aligned}
 (1.20) \quad I(\Delta q) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\frac{\hbar\Delta t(1-2i\varepsilon)}{2m}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{2\pi} e^{-\xi^2 + 2\xi \frac{e^{i\pi/4}\Delta q}{2\sqrt{\frac{\hbar\Delta t(1-2i\varepsilon)}{2m}}}} = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{2m}{i\hbar\Delta t(1-2i\varepsilon)}} e^{\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m\Delta q^2}{2\Delta t(1-2i\varepsilon)} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}} = \\
 &= \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{P^2}{2m} \Delta t} | q \rangle.
 \end{aligned}$$

Reemplazando en la Ec. (1.11), obtenemos en definitiva para el elemento de matriz¹

$$(1.23) \quad \langle q_{n+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} H \Delta t} | q_n \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t (1 - 2i\varepsilon)}} \times \\ \times e^{\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m(q_{n+1} - q_n)^2}{2\Delta t (1 - 2i\varepsilon)} - \Delta t (1 - 2i\varepsilon) V(q_n) \right\}} (1 + O(N^{-2})) .$$

Señalemos que, a los efectos de obtener expresiones bien definidas, todo sucede como si hubiera sido necesario introducir una parte imaginaria negativa en la variable temporal,

$$(1.24) \quad \Delta t \rightarrow \Delta t (1 - 2i\varepsilon) = \frac{(t_{final} - t_{inicial})(1 - 2i\varepsilon)}{N} ,$$

la que debe tender a cero sólo al final del cálculo. En la medida en que las expresiones resultantes sean funciones analíticas en el semiplano inferior abierto de la variable

$$(1.25) \quad T := (t_{final} - t_{inicial})(1 - 2i\varepsilon) ,$$

una forma alternativa (y equivalente) de operar sería considerar un intervalo de *tiempo euclídeo*

$$(1.26) \quad \beta := i T$$

con T en el semieje imaginario negativo (de modo que $\beta > 0$), para tomar al final del cálculo la extensión analítica al valor físico,

$$(1.27) \quad \beta \rightarrow i(t_{final} - t_{inicial})(1 - i0) ,$$

con $(t_{final} - t_{inicial}) > 0$.

¹A partir de esta expresión podemos precisar qué se entiende por un potencial *suavemente variable*. En efecto, cuando $|q_{n+1} - q_n|$ crece, la exponencial se vuelve fuertemente oscilante debido al término cuadrático, por lo que el valor que la distribución que ella define toma sobre una función suave dependerá fundamentalmente de sus valores en un entorno de radio

$$(1.21) \quad |q_{n+1} - q_n| \approx \sqrt{\frac{2\hbar\Delta t}{m}} = \sqrt{\frac{2\hbar(t_{final} - t_{inicial})}{Nm}} .$$

En esas condiciones, podremos despreciar la variación del potencial $V(q)$ en ese entorno si ella da lugar a términos de orden superior al de los de $O(N^{-1})$ que estamos reteniendo,

$$(1.22) \quad \frac{\Delta t}{\hbar} |V'(q)| \sqrt{\frac{2\hbar\Delta t}{m}} = \sqrt{\frac{2}{\hbar m}} |V'(q)| (t_{final} - t_{inicial})^{\frac{3}{2}} N^{-\frac{3}{2}} = o(N^{-1}) ,$$

lo que se satisface para todo q si $V(q)$ tiene una deriva acotada.

Nótese finalmente que, en una teoría relativista, esto sería equivalente al cambio

$$(1.28) \quad t \equiv x^0 \rightarrow x^0 \sqrt{g_{00}} = x^0 (1 - 2\imath\varepsilon),$$

donde la componente g_{00} de la métrica es tomada en el *semiplano inferior abierto* del plano complejo (esto implica que g^{00} sea tomada en el *semiplano superior abierto*, lo que selecciona automáticamente el *propagador de Feynman*).

La amplitud de probabilidad de transición de la Eq. (1.13) queda entonces expresada como

$$(1.29) \quad \begin{aligned} & \langle q_{final}, t_{final} | q_{inicial}, t_{inicial} \rangle = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int dq_1 \dots \int dq_{N-1} \left(\frac{m}{2\pi\imath\hbar\Delta t(1 - 2\imath\varepsilon)} \right)^{\frac{N}{2}} \times \\ & e^{\frac{\imath}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t(1 - 2\imath\varepsilon) \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t(1 - 2\imath\varepsilon)} \right)^2 - V(q_n) \right\}} (1 + O(N^{-1})). \end{aligned}$$

La suma en el argumento de la exponencial (para $\varepsilon = 0$) corresponde a la funcional *acción clásica* (en la formulación Lagrangiana),

$$(1.30) \quad S[q(t)] := \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} dt \left\{ \frac{m}{2} \dot{q}(t)^2 - V(q(t)) \right\},$$

de una trayectoria poligonal que en el espacio de configuración se inicia en el punto $q_{inicial}$ en el instante $t_{inicial}$ y termina en q_{final} a tiempo t_{final} , por la cual la partícula une los puntos *próximos* q_n y q_{n+1} en el intervalo de tiempo Δt moviéndose con velocidad constante, siempre que pueda despreciarse la variación del potencial durante cada uno de esos tramos de trayectoria. Por su parte, las integrales sobre las posiciones intermedias representan una suma de contribuciones de la forma $e^{\frac{\imath}{\hbar} S[q(t)]}$ por cada una de tales trayectorias² (a menos de términos de $O(N^{-1})$), con una *medida de integración* que resulta *independiente del potencial*,

$$(1.31) \quad d\mu_n[q(t)] := \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \left(\frac{m}{2\pi\imath\hbar\Delta t(1 - 2\imath\varepsilon)} \right)^{\frac{N}{2}}.$$

²Señalemos que, con el mismo grado de aproximación, podríamos reemplazar la trayectoria poligonal por otra conformada, por ejemplo, por arcos de trayectorias clásicas que unan los puntos q_n y q_{n+1} en el intervalo de tiempo Δt . En efecto, la diferencia en el valor de $S[q(t)]$ sólo contribuiría con términos de $O(N^{-1})$ al valor del integrando. En este caso, el argumento de la exponencial sería $\frac{\imath}{\hbar}$ veces el mínimo valor de la acción clásica calculada sobre trayectorias que pasan por los puntos q_n en los instantes $t_n = t_{inicial} + n\Delta t$.

El límite para $N \rightarrow \infty$ del segundo miembro de la Ec. (1.29) se indica formalmente como

$$(1.32) \quad \langle q_{final}, t_{final} | q_{inicial}, t_{inicial} \rangle = \int_{(q_{inicial}, t_{inicial})}^{(q_{final}, t_{final})} \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S[q(t)]},$$

lo que se interpreta como una suma o *integral* de contribuciones de la forma $e^{\frac{i}{\hbar} S[q(t)]}$ sobre todas las trayectorias continuas en el espacio de configuración que se inician en el punto $q_{inicial}$ en el instante $t_{inicial}$ y terminan en el punto q_{final} en el instante t_{final} , tomada con una medida de integración $\mathcal{D}q$ consistente con la de la Ec. (1.31) (aplicable a la rectificación de tales trayectorias).

Esta representación de la amplitud de probabilidad de transición como una *integral funcional* proporciona una clara relación entre la Mecánica Clásica y la Mecánica Cuántica. En efecto, si consideramos el *límite clásico*, caracterizado por $\hbar \rightarrow 0$, vemos que pequeñas variaciones en la trayectoria, $\delta q(t)$, producen grandes variaciones en el exponente de $e^{\frac{i}{\hbar} S[q(t)]}$ (es decir, en la acción clásica medida en unidades de $\hbar$):

$$(1.33) \quad \frac{1}{\hbar} \delta S[q] = \frac{1}{\hbar} \int dt \frac{\delta S[q]}{\delta q(t)} \delta q(t).$$

En consecuencia, la contribución a la integral del segundo miembro de la Ec. (1.32) proveniente del entorno de cada trayectoria se promedia rápidamente a cero, con la sola excepción de las *trayectorias clásicas*, que hacen estacionaria a la acción $S[q(t)]$ (es decir, para las cuales $\frac{\delta S[q]}{\delta q(t)} = 0$).

En consecuencia podemos decir que, mientras que todas las trayectorias en el espacio de configuración que conectan la posición inicial con la final en el intervalo de tiempo disponible contribuyen al comportamiento cuántico de la partícula con un peso $e^{\frac{i}{\hbar} S[q]}$ en la integral funcional, en el límite clásico $\hbar \rightarrow 0$ las trayectorias clásicas que satisfacen esa condición quedan singularizadas de modo tal que

$$(1.34) \quad \langle q_{final}, t_{final} | q_{inicial}, t_{inicial} \rangle \approx e^{\frac{i}{\hbar} S[q_{clásica}]} \times \text{constante}.$$

1.2. Valores medios de productos de operadores ordenados cronológicamente. Supongamos que queremos calcular el elemento de matriz de cierta

magnitud física $\mathcal{O}$ tomada en el instante t , con $t_{final} > t > t_{inicial}$, entre los estados final e inicial que estamos considerando:

$$(1.35) \quad \langle q_{final}, t_{final} | \mathcal{O}_H(t) | q_{inicial}, t_{inicial} \rangle = \langle q_{final} | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_{final} - t)} \mathcal{O}_S e^{-\frac{i}{\hbar} H(t - t_{inicial})} | q_{inicial} \rangle,$$

donde $\mathcal{O}_H(t)$ es el correspondiente operador en la descripción de Heisenberg mientras que $\mathcal{O}_S$ lo es en la descripción de Schrödinger.

Empleando la relación de completitud de la Ec. (1.3) y la representación como integral funcional de la Ec. (1.32), podemos escribir para este elemento de matriz

$$(1.36) \quad \begin{aligned} & \int dq' \int dq'' \langle q_{final}, t_{final} | q', t \rangle \langle q' | \mathcal{O}_S | q'' \rangle \langle q'', t | q_{inicial}, t_{inicial} \rangle = \\ & = \int dq' \int dq'' \int_{(q', t)}^{(q_{final}, t_{final})} \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\cdot)](t_{final}, t)} \langle q' | \mathcal{O}_S | q'' \rangle \times \\ & \quad \times \int_{(q_{inicial}, t_{inicial})}^{(q'', t)} \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\cdot)](t, t_{inicial})}. \end{aligned}$$

Supongamos por simplicidad que el operador $\mathcal{O}_S$ sea diagonal en la base de autovectores de Q ,

$$(1.37) \quad \langle q | \mathcal{O}_S | q' \rangle = \mathcal{O}(q) \delta(q - q')$$

(donde $\mathcal{O}(q)$ es cierta función numérica de la variable q), entonces

$$(1.38) \quad \begin{aligned} & \langle q_{final}, t_{final} | \mathcal{O}_H(t) | q_{inicial}, t_{inicial} \rangle = \\ & = \int dq \int_{(q, t)}^{(q_{final}, t_{final})} \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\cdot)](t_{final}, t)} \mathcal{O}(q) \times \\ & \quad \times \int_{(q_{inicial}, t_{inicial})}^{(q, t)} \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\cdot)](t, t_{inicial})}, \end{aligned}$$

lo que convenimos en denotar por

$$(1.39) \quad \begin{aligned} & \langle q_{final}, t_{final} | \mathcal{O}_H(t) | q_{inicial}, t_{inicial} \rangle = \\ & = \int_{(q_{inicial}, t_{inicial})}^{(q_{final}, t_{final})} \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\cdot)](t_{final}, t_{inicial})} \mathcal{O}(q(t)) \end{aligned}$$

e interpretar como una integral sobre trayectorias en cuyo integrando aparece además como factor el valor que la función $\mathcal{O}(q)$ toma cuando su argumento es el valor de la coordenada por la que pasa la trayectoria en el instante t .

Consideremos cierto número de operadores $\mathcal{O}_H^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, diagonales en la base $|q\rangle$,

$$(1.40) \quad \langle q | \mathcal{O}_S^{(k)} | q' \rangle = \mathcal{O}^{(k)}(q) \delta(q - q'),$$

tomados en ciertos instantes t_k .

Para su producto ordenado cronológicamente,

$$(1.41) \quad \mathbf{T} \left\{ \mathcal{O}_H^{(1)}(t_1) \mathcal{O}_H^{(2)}(t_2) \dots \mathcal{O}_H^{(n)}(t_n) \right\} := \mathcal{O}_H^{(i_n)}(t_{i_n}) \dots \mathcal{O}_H^{(i_2)}(t_{i_2}) \mathcal{O}_H^{(i_1)}(t_{i_1}),$$

donde $t_{i_n} \geq t_{i_{n-1}} \geq \dots \geq t_{i_2} \geq t_{i_1}$, la representación como integral funcional de la Ec. (1.39) se generaliza directamente a

$$(1.42) \quad \begin{aligned} & \langle q_{final}, t_{final} | \mathbf{T} \left\{ \mathcal{O}_H^{(1)}(t_1) \mathcal{O}_H^{(2)}(t_2) \dots \mathcal{O}_H^{(n)}(t_n) \right\} | q_{inicial}, t_{inicial} \rangle = \\ & = \int_{(q_{inicial}, t_{inicial})}^{(q_{final}, t_{final})} \mathcal{D}q \, e^{\frac{i}{\hbar} S[q(\cdot)]} \mathcal{O}^{(1)}(q(t_1)) \mathcal{O}^{(2)}(q(t_2)) \dots \mathcal{O}^{(n)}(q(t_n)), \end{aligned}$$

donde el orden de los factores (numéricos) $\mathcal{O}^{(k)}(q(t_k))$ en el integrando del segundo miembro es irrelevante.

1.3. Ejemplo: el oscilador armónico. Consideremos el potencial

$$(1.43) \quad V(Q) = \frac{m}{2} \omega^2 Q^2,$$

de modo que el Lagrangiano resulte cuadrático.

Tomando³ $\hbar = 1$ y un tiempo euclídeo $\beta = \imath T > 0$, a partir de las Ecs. (1.5) y (1.29) podemos escribir

$$(1.45) \quad \langle q_f | e^{-\imath T H} | q_i \rangle = \langle q_f | e^{-\beta H} | q_i \rangle = \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \left(\frac{mN}{2\pi\beta} \right)^{\frac{N}{2}} \times \\ \times e^{-\frac{\beta}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{m}{2} \left\{ \frac{N^2}{\beta^2} (q_{n+1} - q_n)^2 + \omega^2 q_n^2 \right\}} (1 + O(N^{-1})) ,$$

donde la suma en el argumento de la exponencial es positiva definida (para $\beta > 0$). Desarrollando el cuadrado de la diferencia, es un ejercicio directo llevar esta integral múltiple a la forma

$$(1.46) \quad \langle q_f | e^{-\beta H} | q_i \rangle = e^{-\frac{mN}{2\beta} \left\{ q_f^2 + \left[1 + \left(\frac{\beta\omega}{N} \right)^2 \right] q_i^2 \right\}} \left(\frac{mN}{2\pi\beta} \right)^{\frac{N}{2}} \times \\ \times \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n e^{-\frac{mN}{2\beta} \left[2 + \left(\frac{\beta\omega}{N} \right)^2 \right] \sum_{i,j=1}^{N-1} q_i M_{ij} q_j} \times \\ \times e^{-\frac{mN}{\beta} (q_f q_{N-1} + q_1 q_i)} (1 + O(N^{-1})) ,$$

³Las *unidades naturales* ($\hbar = 1, c = 1$) corresponden a cambiar las escalas de las distintas magnitudes según

$$(1.44) \quad \begin{aligned} S &\leftarrow \frac{S}{\hbar}, & \left[\frac{S}{\hbar} \right] &= \mathfrak{l}^0, \\ t &\leftarrow ct, & [ct] &= \mathfrak{l}^1, \\ m &\leftarrow \frac{mc}{\hbar}, & \left[\frac{mc}{\hbar} \right] &= \mathfrak{l}^{-1}, \\ \vec{p} &\leftarrow \frac{\vec{p}}{\hbar}, & \left[\frac{\vec{p}}{\hbar} \right] &= \mathfrak{l}^{-1}, \\ E &\leftarrow \frac{E}{\hbar c}, & \left[\frac{E}{\hbar c} \right] &= \mathfrak{l}^{-1}, \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{l}$ es una escala de referencia con unidades de longitud.

donde la matriz M es autoadjunta (simétrica) para $\beta > 0$, positiva definida y sus elementos de matriz están dados por

$$(1.47) \quad M_{ij} = \delta_{i,j} - \frac{1}{\left[2 + \left(\frac{\beta\omega}{N}\right)^2\right]} (\delta_{i,j-1} + \delta_{i,j+1}) .$$

Cambiando la escala de las variables de integración de modo que

$$(1.48) \quad q_n \rightarrow \frac{x_n}{\sqrt{\frac{mN}{2\beta} \left[2 + \left(\frac{\beta\omega}{N}\right)^2\right]}} ,$$

y definiendo

$$(1.49) \quad y_i := \frac{\sqrt{\frac{mN}{2\beta}}}{\sqrt{\left[2 + \left(\frac{\beta\omega}{N}\right)^2\right]}} q_i ,$$

$$y_f := \frac{\sqrt{\frac{mN}{2\beta}}}{\sqrt{\left[2 + \left(\frac{\beta\omega}{N}\right)^2\right]}} q_f ,$$

la Ec. (1.46) se lleva a la forma

$$(1.50) \quad \langle q_f | e^{-\beta H} | q_i \rangle = e^{-\frac{mN}{2\beta} \left\{ q_f^2 + \left[1 + \left(\frac{\beta\omega}{N}\right)^2\right] q_i^2 \right\}} \times$$

$$\times \left(\frac{mN}{2\pi\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\pi \left[2 + \left(\frac{\beta\omega}{N}\right)^2\right] \right)^{-\frac{N-1}{2}} \times$$

$$\times \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n e^{-\sum_{i,j=1}^{N-1} x_i M_{ij} x_j} e^{2(y_f x_{N-1} + x_1 y_i)} (1 + O(N^{-1})) .$$

La integral múltiple de la segunda línea del segundo miembro de esta igualdad puede escribirse como

$$(1.51) \quad I_{N-1} := \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n e^{-\bar{x}^t M \bar{x} + \bar{y}^t \bar{x} + \bar{x}^t \bar{y}} ,$$

donde

$$(1.52) \quad \bar{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{y} := \begin{pmatrix} y_i \\ 0 \\ \vdots \\ y_f \end{pmatrix}.$$

Completando cuadrados en el argumento de la exponencial y teniendo en cuenta que la medida de integración es invariante frente a traslaciones y que M es llevada a la forma diagonal mediante una transformación ortogonal,

$$(1.53) \quad R^t M R = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}),$$

con $\lambda_k > 0$ para todo k , tenemos

$$(1.54) \quad \begin{aligned} I_{N-1} &:= e^{\bar{y}^t M^{-1} \bar{y}} \int \prod_{n=1}^{N-1} dx'_n \det R e^{-\bar{x}'^t R^t M R \bar{x}'} = \\ &= e^{\bar{y}^t M^{-1} \bar{y}} \prod_{n=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx'_n e^{-\lambda_n x_n'^2} = e^{\bar{y}^t M^{-1} \bar{y}} \prod_{n=1}^{N-1} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_n}} = \\ &= e^{\bar{y}^t M^{-1} \bar{y}} \pi^{\frac{N-1}{2}} (\det M)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Debemos entonces calcular el determinante de la matriz M y de cuatro de los elementos de su matriz inversa.

Llamemos

$$(1.55) \quad A = \frac{1}{\left[2 + \left(\frac{\beta\omega}{N}\right)^2\right]} < \frac{1}{2}.$$

La matriz M tiene la forma

$$(1.56) \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -A & 0 & 0 & \dots \\ -A & 1 & -A & 0 & \dots \\ 0 & -A & 1 & -A & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} =: M_{N-1},$$

y su determinante es una función de N que satisface

$$(1.57) \quad D_{N-1} := \det M_{N-1} = 1 D_{N-2} - (-A) (-A D_{N-3}).$$

Además, para $N = 2, 3$ tenemos

$$(1.58) \quad D_1 = 1, \quad D_2 = 1 - A^2,$$

de modo que resulta consistente con la anterior relación definir $D_0 = 1$.

Estas relaciones pueden resumirse en

$$(1.59) \quad \begin{pmatrix} D_k \\ D_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -A^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{k-1} \\ D_{k-2} \end{pmatrix},$$

de donde resulta que

$$(1.60) \quad \begin{pmatrix} D_k \\ D_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -A^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} D_1 = 1 \\ D_0 = 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz en el segundo miembro de la Ec. (1.59) tiene por autovectores a

$$(1.61) \quad \begin{pmatrix} 1 & -A^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{\pm} \\ 1 \end{pmatrix} = \mu_{\pm} \begin{pmatrix} \mu_{\pm} \\ 1 \end{pmatrix},$$

con autovalores reales

$$(1.62) \quad \mu_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - 4A^2} \right\} > 0.$$

En esas condiciones,

$$(1.63) \quad \begin{pmatrix} 1 & -A^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \mu_+ & 0 \\ 0 & \mu_- \end{pmatrix} U^{-1},$$

donde

$$(1.64) \quad U = \begin{pmatrix} \mu_+ & \mu_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \frac{1}{\mu_+ - \mu_-} \begin{pmatrix} 1 & -\mu_- \\ -1 & \mu_+ \end{pmatrix},$$

con $\det U = \mu_+ - \mu_- = B$. Entonces,

$$(1.65) \quad \begin{pmatrix} 1 & -A^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = U \begin{pmatrix} \mu_+^k & 0 \\ 0 & \mu_-^k \end{pmatrix} U^{-1}.$$

Reemplazando en la Ec. (1.60) y teniendo en cuenta que $\mu_+ + \mu_- = 1$, obtenemos

$$(1.66) \quad \begin{pmatrix} D_k \\ D_{k-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_+ - \mu_-} \begin{pmatrix} \mu_+^{k+1} - \mu_-^{k+1} \\ \mu_+^k - \mu_-^k \end{pmatrix},$$

de modo que

$$(1.67) \quad D_k = \frac{\mu_+^{k+1} - \mu_-^{k+1}}{\mu_+ - \mu_-}.$$

Por su parte, los elementos de matriz necesarios de M^{-1} son

$$(1.68) \quad (M_{N-1}^{-1})_{1,1} = (M_{N-1}^{-1})_{N-1,N-1} = \frac{D_{N-2}}{D_{N-1}}$$

y

$$(1.69) \quad (M_{N-1}^{-1})_{1,N-1} = (M_{N-1}^{-1})_{N-1,1} = (-1)^{N-2} \frac{(-A)^{N-2}}{D_{N-1}} = \frac{A^{N-2}}{D_{N-1}}$$

Ahora bien, para $N \gg 1$, podemos aproximar

$$(1.70) \quad A = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta\omega}{N} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\beta\omega}{N} \right)^4 O(N^{-6}) \right\},$$

$$A^{N-2} = 2^{2-N} \left\{ 1 - \frac{N}{2} \left(\frac{\beta\omega}{N} \right)^2 + O(N^{-2}) \right\} = 2^{2-N} (1 + O(N^{-1})).$$

Similarmente,

$$(1.71) \quad \mu_{\pm} = \frac{1}{2} e^{\pm \frac{\beta\omega}{N}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta\omega}{N} \right)^2 \mp \frac{1}{24} \left(\frac{\beta\omega}{N} \right)^3 + O(N^{-4}) \right\}$$

$$\mu_+ - \mu_- = \sqrt{1 - 4A^2} = \frac{\beta\omega}{N} \left\{ 1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\beta\omega}{N} \right)^2 + O(N^{-4}) \right\},$$

de donde resulta que

$$(1.72) \quad \mu_{\pm}^N = \frac{e^{\pm \beta\omega}}{2^N} \left\{ 1 - \frac{(\beta\omega)^2}{2N} + \frac{1}{8} \left((\beta\omega)^4 \mp \frac{(\beta\omega)^3}{3} \right) \frac{1}{N^2} + O(N^{-3}) \right\},$$

$$\mu_+^N - \mu_-^N = \frac{\sinh(\beta\omega)}{2^{N-1}} \left\{ 1 - \frac{(\beta\omega)^2}{2N} + \frac{(\beta\omega)^4}{8N^2} \right\} +$$

$$+ \frac{\cosh(\beta\omega)}{2^{N-1}} \left\{ -\frac{(\beta\omega)^3}{3N^2} \right\} + O(N^{-3}).$$

Entonces,

$$(1.73) \quad D_{N-1} = \frac{\sinh(\beta\omega)}{2^N} \left\{ \frac{2N}{\beta\omega} - \beta\omega + \frac{3\beta\omega + (\beta\omega)^3}{4N} \right\} +$$

$$+ \frac{\cosh(\beta\omega)}{2^N} \left\{ -\frac{(\beta\omega)^2}{12N} \right\} + O(N^{-2}),$$

$$\frac{D_{N-2}}{D_{N-1}} = 2 \left(1 - \frac{\beta\omega}{N} \coth(\beta\omega) + O(N^{-2}) \right),$$

$$\frac{A^{N-2}}{D_{N-1}} = \frac{2\beta\omega}{N \sinh(\beta\omega)} (1 + O(N^{-2})).$$

Finalmente, reemplazando estos resultados en la Ec. (1.50), es inmediato verificar que

$$(1.74) \quad \langle q_f | e^{-\beta H} | q_i \rangle = \left(\frac{m\omega}{2\pi \sinh(\beta\omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times e^{-\left(\frac{m\omega}{2 \sinh \beta\omega} \right) [(q_i^2 + q_f^2) \cosh(\beta\omega) - 2q_i q_f]} (1 + O(N^{-1})).$$

Tomando ahora el límite para $N \rightarrow \infty$ y la extensión analítica en β desde valores reales positivos hacia $\beta \rightarrow \imath(T - \imath\varepsilon)$, con $T = t_f - t_i \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, obtenemos para el elemento de matriz del operador de evolución del oscilador armónico el límite (débil)

$$(1.75) \quad \langle q_f | e^{-\frac{\imath}{\hbar} T H} | q_i \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{m\omega}{2\pi\imath\hbar \sin[(T - \imath\varepsilon)\omega]} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times e^{\frac{\imath}{\hbar} \left(\frac{m\omega}{2 \sin[(T - \imath\varepsilon)\omega]} \right) [(q_i^2 + q_f^2) \cos[(T - \imath\varepsilon)\omega] - 2q_i q_f]},$$

donde hemos restituido la constante $\hbar$.

Señalemos que el argumento de la exponencial en el segundo miembro de la anterior ecuación (en el límite $\varepsilon \rightarrow 0^+$) es $\frac{\imath}{\hbar}$ veces la acción de la *trayectoria clásica* que comienza en el punto q_i en el instante t_i y termina en q_f en el instante t_f , como puede verificarse fácilmente. Esa es una característica de los Lagrangianos cuadráticos.

1.4. La función de partición . Volviendo a la Ec. (1.74), podemos construir la *función de partición* del oscilador armónico para una temperatura dada en términos del tiempo euclídeo por $T_{emp} = \frac{\hbar}{k_B \beta}$, donde k_B es la constante de Boltzman:

$$(1.76) \quad Z(\beta) := \text{Tr} \left\{ e^{-\frac{\beta}{\hbar} H} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} dq \langle q | e^{-\frac{\beta}{\hbar} H} | q \rangle = \\ = \left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sinh(\beta\omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-\left(\frac{m\omega}{\hbar \sinh \beta\omega} \right) [\cosh(\beta\omega) - 1] q^2} = \\ = \left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sinh(\beta\omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-\frac{m\omega}{\hbar} \tanh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) q^2} = \\ = \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right)} = \frac{e^{-\frac{\beta\omega}{2}}}{1 - e^{-\beta\omega}} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\omega(n + \frac{1}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\hbar\omega(n + \frac{1}{2})}{k_B T_{emp}}}.$$

En el caso general podemos escribir

$$(1.77) \quad Z(\beta) := \text{Tr} \left\{ e^{-\frac{\beta}{\hbar} H} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{(q,0)}^{(q,\beta)} \mathcal{D}q e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta} d\tau \left[\frac{m}{2} \dot{q}(\tau)^2 + V(q(\tau)) \right]},$$

lo que se denota por

$$(1.78) \quad Z(\beta) = \oint \mathcal{D}q e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta} d\tau \left[\frac{m}{2} \dot{q}(\tau)^2 + V(q(\tau)) \right]},$$

dato que corresponde a integrar sobre ciertas *trayectorias cerradas* en el espacio de configuración ($q(\beta) = q(0)$), parametrizadas por el *tiempo euclídeo* $\tau \in [0, \beta]$.

Nótese que en el límite clásico, $\hbar \rightarrow 0$, las principales contribuciones a la función de partición provienen de los *mínimos* de la *acción euclídea*

$$(1.79) \quad S_E[q(\tau)] := \int_0^{\beta} d\tau \left[\frac{m}{2} \dot{q}(\tau)^2 + V(q(\tau)) \right],$$

que es una funcional acotada por abajo si la función potencial $V(q)$ también lo es.

Para el oscilador armónico tenemos

$$(1.80) \quad Z(\beta) = \oint \mathcal{D}q e^{-\frac{m}{2\hbar} \int_0^{\beta} d\tau [\dot{q}(\tau)^2 + \omega^2 q(\tau)^2]}.$$

Supongamos que las trayectorias sobre las que se suma no son sólo cerradas sino también periódicas, es decir, que satisfacen además que $\dot{q}(\beta) = \dot{q}(0)$. En esas condiciones, integrando por partes en la integral del argumento de la exponencial (lo que no produce términos de borde) obtenemos que, formalmente,

$$(1.81) \quad Z(\beta) = \oint \mathcal{D}q e^{-\frac{m}{2\hbar} \int_0^{\beta} d\tau q(\tau) [-\partial_{\tau}^2 + \omega^2] q(\tau)}.$$

Para rectificaciones de las trayectorias en N tramos, el argumento de la exponencial se reduce a una forma cuadrática de los puntos intermedios q_n , que es una versión discretizada del producto escalar

$$(1.82) \quad (q(\tau), D_{\omega} q(\tau)) = \int_0^{\beta} d\tau q(\tau) [-\partial_{\tau}^2 + \omega^2] q(\tau),$$

donde el operador diferencial

$$(1.83) \quad D_{\omega} = -\partial_{\tau}^2 + \omega^2$$

está definido sobre el espacio de funciones periódicas en el intervalo $[0, \beta]$, y la integral múltiple se hace respecto de cierta medida de integración que, como hemos señalado, es independiente del potencial (independiente de ω en el presente caso). El resultado de la integral múltiple será el determinante de dicha forma cuadrática elevado a la potencia $-1/2$, multiplicado por cierto factor, producto de la medida.

Entonces, en el límite $N \rightarrow \infty$, cabe esperar que el resultado de la integral funcional sea (cierta versión *regularizada* de) la potencia $-1/2$ del determinante funcional del operador diferencial D_ω así definido, a menos de un factor independiente del potencial.

Consideremos el problema de autovalores de D_ω :

$$(1.84) \quad D_\omega \psi_\lambda(\tau) = (-\partial_\tau^2 + \omega^2) \psi_\lambda(\tau) = \lambda \psi_\lambda(\tau),$$

$$\psi_\lambda(\beta) = \psi_\lambda(0), \quad \dot{\psi}_\lambda(\beta) = \dot{\psi}_\lambda(0).$$

Esto corresponde a un problema de Sturm - Liouville autoadjunto, con un espectro real discreto y cuyos autovectores forman un sistema ortogonal completo:

$$(1.85) \quad \psi_\lambda(\tau) = e^{\pm i\tau\sqrt{\lambda - \omega^2}}, \quad \text{con } e^{\pm i\beta\sqrt{\lambda - \omega^2}} = 1$$

$$\Rightarrow \beta\sqrt{\lambda - \omega^2} = 2\pi n \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \omega^2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Consideremos el producto

$$(1.86) \quad \prod_{n=1}^N \lambda_n = \left\{ \prod_{n=1}^N \left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 \right\} \prod_{n=1}^N \left[1 + \left(\frac{\beta\omega}{2\pi n}\right)^2 \right].$$

Mientras que el primer factor (independiente de ω) diverge cuando $N \rightarrow \infty$, el segundo tiene un límite finito,

$$(1.87) \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{\beta\omega}{2\pi n}\right)^2 \right] = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \log \left[1 + \left(\frac{\beta\omega}{2\pi n}\right)^2 \right] \right\} = \frac{2 \sinh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right)}{\beta\omega}.$$

En esas condiciones, tomando una frecuencia de referencia ω_0 , podemos *definir* el determinante del operador $(D_\omega D_{\omega_0}^{-1})$ como

$$(1.88) \quad \text{Det} (D_\omega D_{\omega_0}^{-1}) := \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \prod_{n=1}^N \left[\frac{1 + \left(\frac{\beta\omega}{2\pi n}\right)^2}{1 + \left(\frac{\beta\omega_0}{2\pi n}\right)^2} \right]^2 \right\} = \left(\frac{\sinh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right)} \right)^2,$$

de donde resulta que

$$(1.89) \quad \frac{Z(\beta, \omega)}{Z(\beta, \omega_0)} = \{ \text{Det} (D_\omega D_{\omega_0}^{-1}) \}^{-\frac{1}{2}}.$$

Este ejemplo muestra que la integral funcional sobre trayectorias periódicas es, en el caso de Lagrangianos cuadráticos y a menos de una constante de proporcionalidad, una representación formal del *determinante funcional* del operador diferencial que aparece en la acción euclídea (con dominio en ese subespacio de funciones periódicas).

Finalmente, recordemos que

$$(1.90) \quad Z(\beta) := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n},$$

donde los E_n son los autovalores del Hamiltoniano H . Entonces, para $\beta \rightarrow \infty$, $Z(\beta) \simeq e^{-\beta E_0}$, donde E_0 es el autovalor correspondiente al estado fundamental. En consecuencia, para $T \rightarrow \infty$ y $\varepsilon > 0$,

$$(1.91) \quad \text{Tr} \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar} T(1 - i\varepsilon)H} \right\} \simeq \langle 0 | e^{-\frac{i}{\hbar} T(1 - i\varepsilon)H} | 0 \rangle,$$

donde $|0\rangle$ es el estado fundamental de H .

Por lo tanto, teniendo en cuenta la Ec. (1.78), vemos que la amplitud de probabilidad de *persistencia del vacío* puede ser representada mediante la integral funcional

$$(1.92) \quad \langle 0, t_f \rightarrow \infty | 0, t_i \rightarrow -\infty \rangle = \oint \mathcal{D}q \, e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[\frac{m}{2} \dot{q}(t)^2 - V(q(t)) \right]},$$

donde se suma sobre las contribuciones de las trayectorias que se cierran al cabo de un tiempo infinito.

1.5. Potenciales dependientes del tiempo. En la descripción de Heisenberg, los operadores evolucionan según la ecuación

$$(1.93) \quad \dot{\mathcal{O}}_H(t) = \frac{i}{\hbar} [H(P_H(t), Q_H(t); t), \mathcal{O}_H(t)].$$

Cuando el Hamiltoniano es polinómico en P y Q , y tiene una dependencia explícita en el tiempo que puede separarse de la forma

$$(1.94) \quad H(P_H(t), Q_H(t); t) = H_0(P_H(t), Q_H(t)) + H_{int}(Q_H(t); t),$$

el operador $H_{int}(t) = H(t) - H_0$ (que supondremos de soporte compacto en el tiempo) permite definir la *descripción de interacción* mediante la transformación unitaria

$$(1.95) \quad \mathcal{O}_I(t) = U_I(t) \mathcal{O}_H(t) U_I(t)^\dagger,$$

donde $U_I(t)$ satisface

$$(1.96) \quad \dot{U}_I(t) = -\frac{i}{\hbar} H_{int}(Q_I(t); t) U_I(t), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} U_I(t) = \mathbf{1}.$$

Como consecuencia, los operadores en esa descripción evolucionan según la ecuación

$$(1.97) \quad \dot{\mathcal{O}}_I(t) = \frac{i}{\hbar} [H_0(P_I(t), Q_I(t)), \mathcal{O}_I(t)].$$

En esas condiciones, la teoría de perturbaciones dependientes del tiempo permite expresar la amplitud de probabilidad de transición del estado $|q_i, t_i\rangle$ al estado $|q_f, t_f\rangle$ (donde $Q_I(t)|q, t\rangle = q|q, t\rangle$), como la serie asintótica que se obtiene a partir del desarrollo del orden cronológico de la exponencial en el elemento de matriz

$$(1.98) \quad \begin{aligned} & \langle q_f, t_f | U_I(t_f, t_i) | q_i, t_i \rangle \simeq \\ & \simeq \langle q_f, t_f | \mathbf{T} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} H_{int}(Q_I(t); t) dt \right\} | q_i, t_i \rangle := \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i/\hbar)^n}{n!} \int_{t_i}^{t_f} dt_1 \dots \int_{t_i}^{t_f} dt_n \times \\ & \times \langle q_f, t_f | \mathbf{T} \{ H_{int}(Q_I(t_1); t_1) \dots H_{int}(Q_I(t_n); t_n) \} | q_i, t_i \rangle. \end{aligned}$$

Sea $L(q, \dot{q}; t)$ el Lagrangiano correspondiente al Hamiltoniano $H(p, q; t)$, y $L_0(q, \dot{q})$ el correspondiente a $H_0(p, q)$. Entonces,

$$(1.99) \quad L_{int}(q; t) = -H_{int}(q; t).$$

Recurriendo al resultado obtenido para los elemento de matriz de un producto de operadores ordenados cronológicamente⁴, Ec. (1.42), podemos escribir

$$\begin{aligned}
 \langle q_f, t_f | \mathbf{T} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} H_{int}(Q_I(t); t) dt \right\} | q_i, t_i \rangle = \\
 (1.100) \quad \int_{(q_i, t_i)}^{(q_f, t_f)} \mathcal{D}q \, e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L_0(q(t), \dot{q}(t))} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L_{int}(q(t); t)} = \\
 = \int_{(q_i, t_i)}^{(q_f, t_f)} \mathcal{D}q \, e^{\frac{i}{\hbar} S[q(t)]},
 \end{aligned}$$

donde

$$(1.101) \quad S[q(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q(t), \dot{q}(t); t)$$

es la acción clásica del sistema.

Nuevamente, este resultado se interpreta como la suma de contribuciones de la forma $e^{\frac{i}{\hbar} S[q(t)]}$ provenientes de trayectorias que van de (q_i, t_i) a (q_f, t_f) , integradas con una medida que no depende del potencial.

1.6. Ejemplo: el oscilador armónico forzado. El Hamiltoniano de un oscilador armónico sometido a la acción de una fuerza externa dependiente del tiempo es

$$(1.102) \quad H(P, Q; t) = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} Q^2 - Q F(t),$$

donde $F(t)$ es una función del tiempo a valores numéricos.

Nos interesa calcular

$$\begin{aligned}
 \langle q_f, t_f | \mathbf{T} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} Q_I(t) F(t) dt \right\} | q_i, t_i \rangle = \\
 (1.103) \quad \int_{(q_i, t_i)}^{(q_f, t_f)} \mathcal{D}q \, e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{m}{2} \dot{q}(t)^2 - \frac{m\omega^2}{2} q(t)^2 + q(t) F(t) \right\}}.
 \end{aligned}$$

Para ello consideraremos primero un tiempo euclídeo $\beta > 0$, para luego tomar la extensión analítica del resultado a $\beta \rightarrow iT(1 - i\varepsilon)$, donde $T = t_f - t_i$ y $\varepsilon > 0$. Supondremos entonces que $F(\tau)$ es una función real, suficientemente suave,

⁴Téngase en cuenta que la descripción de Heisenberg se reduce a la descripción de interacción cuando $H_{int} \equiv 0$, de manera que lo que mostramos para la primera cuando el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo también vale para la segunda.

definida en el intervalo $[0, \beta]$ e idénticamente nula fuera del intervalo abierto $(\delta, \beta - \delta)$, con $\delta > 0$.

Teniendo en cuenta que la medida de integración, Ec. (1.31), resulta invariante frente a traslaciones, en la integral funcional del segundo miembro de la Ec. (1.103) hacemos el cambio

$$(1.104) \quad q(\tau) \rightarrow q(\tau) + x(\tau),$$

donde

$$(1.105) \quad x(\tau) := \int_0^\beta G_\beta(\tau, \tau') f(\tau') d\tau',$$

donde $f(\tau) := F(\tau)/m$ y $G_\beta(\tau, \tau')$ satisface

$$(1.106) \quad \begin{aligned} (-\partial_\tau^2 + \omega^2) G_\beta(\tau, \tau') &= \delta(\tau - \tau'), \\ G_\beta(0, \tau') &= 0 = G_\beta(\beta, \tau'). \end{aligned}$$

En consecuencia, $x(\tau)$ satisface la ecuación

$$(1.107) \quad (-\partial_\tau^2 + \omega^2) x(\tau) = f(\tau)$$

y condiciones de Dirichlet en los extremos del intervalo de tiempo euclídeo, de manera que la traslación no modifica los puntos inicial y final de la trayectoria $q(\tau)$.

Entonces, reemplazando en la expresión de la acción euclídea obtenemos

$$(1.108) \quad \begin{aligned} S_E[q(\tau) + x(\tau)] &= \frac{m}{2} \int_0^\beta d\tau \{ \dot{q}(\tau)^2 + \omega^2 q(\tau)^2 \} + \\ &+ m \int_0^\beta d\tau \{ \partial_\tau [q(\tau) \dot{x}(\tau)] + q(\tau) [-\ddot{x}(\tau)^2 + \omega^2 x(\tau)^2 - f(\tau)] \} + \\ &+ \frac{m}{2} \int_0^\beta d\tau \{ \partial_\tau [x(\tau) \dot{x}(\tau)] + x(\tau) [-\ddot{x}(\tau) + \omega^2 x(\tau) - 2f(\tau)] \} = \\ &= \frac{m}{2} \int_0^\beta d\tau \{ \dot{q}(\tau)^2 + \omega^2 q(\tau)^2 \} + m [q_f \dot{x}(\beta) - q_i \dot{x}(0)] - \\ &\quad - \frac{m}{2} \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\tau' f(\tau) G_\beta(\tau, \tau') f(\tau'). \end{aligned}$$

Nótese que el primer término del miembro de la derecha corresponde a la acción euclídea del oscilador armónico *libre*, mientras que toda la dependencia de la fuerza externa $F(\tau)$ está contenida en el segundo y tercer término, cuya contribución a la

exponencial de $-\frac{1}{\hbar}$ veces la acción puede factorizarse fuera de la integral funcional por no depender de la trayectoria.

La función de Green $G_\beta(\tau, \tau')$ admite el siguiente desarrollo respecto del sistema $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\beta}} \sin\left(\frac{n\pi}{\beta} \tau\right), n = 1, 2, \dots \right\}$, ortonormal y completo⁵ en $\mathbf{L}_2(0, \beta)$:

$$(1.111) \quad G_\beta(\tau, \tau') = \frac{2}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\beta} \tau\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\beta} \tau'\right)}{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 + \omega^2},$$

donde las condiciones de contorno en la Ec. (1.106) están garantizadas por la convergencia uniforme de esta serie.

En consecuencia,

$$(1.112) \quad \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\tau' f(\tau) G_\beta(\tau, \tau') f(\tau') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 + \omega^2},$$

donde los $f_n \in \mathbb{R}$ son los coeficientes del desarrollo en senos de la fuerza externa,

$$(1.113) \quad f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\beta} \tau\right)}{\sqrt{\beta/2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 = \int_0^\beta d\tau f(\tau)^2.$$

Por su parte,

$$(1.114) \quad \begin{aligned} x(\tau) &= \int_0^\beta d\tau' \frac{2}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\beta} \tau\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\beta} \tau'\right)}{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 + \omega^2} f(\tau') = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 + \omega^2} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\beta} \tau\right)}{\sqrt{\beta/2}}, \end{aligned}$$

⁵En efecto,

$$(1.109) \quad \frac{2}{\beta} \int_0^\beta \sin\left(\frac{n\pi}{\beta} \tau\right) \sin\left(\frac{n'\pi}{\beta} \tau\right) d\tau = \delta_{nn'}, \quad n, n' = 1, 2, \dots$$

Similarmente,

$$(1.110) \quad \frac{2}{\beta} \int_0^\beta \cos\left(\frac{n\pi}{\beta} \tau\right) \cos\left(\frac{n'\pi}{\beta} \tau\right) d\tau = \delta_{nn'}, \quad n, n' = 0, 1, 2, \dots$$

de modo que su derivada es

$$(1.115) \quad \dot{x}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right) f_n}{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 + \omega^2} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{\beta} \tau\right)}{\sqrt{\beta/2}},$$

dato que (como consecuencia de (1.113)) esta serie converge absoluta y uniformemente.

Consideremos el límite de estas expresiones para $\beta\omega \gg 1$, para lo que conviene redefinir $\tau \rightarrow \tau + \beta/2$. Para la función de Green obtenemos

$$(1.116) \quad \begin{aligned} G_{\beta}(\tau, \tau') &= \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{\beta}(\tau - \tau')\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{\beta}(\tau + \tau' + \beta)\right)}{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\frac{n\pi}{\beta}(\tau - \tau')} - e^{i\frac{n\pi}{\beta}(\tau + \tau' + \beta)}}{\left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{e^{iE(\tau - \tau')} - e^{iE(\tau + \tau' + \beta)}}{E^2 + \omega^2} + O\left(\frac{1}{\beta\omega}\right), \end{aligned}$$

donde hemos empleado la fórmula de suma de Euler - Maclaurin.

El integrando en el miembro de la derecha de la Ec. (1.116) presenta polos simples en $E = \pm i\omega$, de modo que la integral se resuelve cerrando el camino de integración en el plano complejo de la variable E . Para el primer término, el camino debe encerrar el polo en $E = i\omega$ si $\tau - \tau' > 0$ y el polo en $E = -i\omega$ para $\tau - \tau' < 0$, lo que conduce a

$$(1.117) \quad \frac{1}{2\omega} e^{-\omega|\tau - \tau'|}.$$

En cuanto al segundo término, el camino de integración debe ser cerrado por el semiplano superior, lo que conduce a una contribución

$$(1.118) \quad -\frac{1}{2\omega} e^{-\omega(\tau + \tau' + \beta)}$$

que se anula exponencialmente rápido cuando β crece.

Entonces, en el límite $\beta \rightarrow \infty$ la función de Green se reduce a

$$(1.119) \quad G_{\infty}(\tau - \tau') = \frac{\theta(\tau - \tau')}{2\omega} e^{-\omega(\tau - \tau')} + \frac{\theta(\tau' - \tau)}{2\omega} e^{-\omega(\tau' - \tau)},$$

mientras que su derivada resulta

$$(1.120) \quad \partial_\tau G_\infty(\tau - \tau') = -\frac{\theta(\tau - \tau')}{2} e^{-\omega(\tau - \tau')} + \frac{\theta(\tau' - \tau)}{2} e^{-\omega(\tau' - \tau)},$$

lo que muestra que

$$(1.121) \quad \dot{x}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_\tau G_\infty(\tau - \tau') f(\tau') d\tau',$$

para $f(\tau)$ de soporte compacto, se anula exponencialmente cuando $|\tau| \rightarrow \infty$.

En definitiva, podemos escribir

$$(1.122) \quad \begin{aligned} & \langle q_f, \infty | \mathbf{T} \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} Q_I(\tau) F(\tau) d\tau \right\} | q_i, -\infty \rangle = \\ & e^{\frac{1}{2m\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' F(\tau) G_\infty(\tau - \tau') F(\tau')} \times \\ & \times \int_{(q_i, -\infty)}^{(q_f, \infty)} \mathcal{D}q e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{m}{2} \{ \dot{q}(\tau)^2 + \omega^2 q(\tau)^2 \}}. \end{aligned}$$

Transformemos ahora esta expresión a tiempo minkowskiano mediante el cambio $\tau \rightarrow \imath t(1 - \imath 0)$,

$$(1.123) \quad \begin{aligned} & \langle q_f, \infty | \mathbf{T} \exp \left\{ \frac{\imath}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} Q_I(t) F(t) dt \right\} | q_i, -\infty \rangle = \\ & e^{\frac{\imath}{2m\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' F(t) G_F(t - t') F(t')} \times \\ & \times \int_{(q_i, -\infty)}^{(q_f, \infty)} \mathcal{D}q e^{\frac{\imath}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{m}{2} \{ \dot{q}(t)^2 - \omega^2 q(t)^2 \}}, \end{aligned}$$

donde $F(t)$ es una función suave de soporte compacto y

$$(1.124) \quad G_F(t) := \imath \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} G_\infty(\imath t(1 - \imath \varepsilon)) = \frac{\imath}{2\omega} \left\{ \theta(t) e^{-\imath \omega t} + \theta(-t) e^{\imath \omega t} \right\}$$

corresponde al *propagador de Feynman*.

Esto muestra que la extensión analítica desde tiempos euclídeos, necesaria para dar sentido a la integral funcional, implica la *propagación* de las frecuencias positivas hacia el futuro y de las frecuencias negativas hacia el pasado.

Tomando $q_f = q_i = q$ en la Ec. (1.123) e integrando en q obtenemos la amplitud de probabilidad de persistencia del vacío,

$$\begin{aligned}
 & \text{Tr} \left[\mathbf{T} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} H_H(t) dt \right\} \right] = \\
 (1.125) \quad & = \langle 0, \infty | \mathbf{T} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} Q_I(t) F(t) dt \right\} | 0, -\infty \rangle = \\
 & = \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle_I e^{\frac{i}{2m\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' F(t) G_F(t-t') F(t')},
 \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta la Ec. (1.92) y el hecho de que $F(t)$ es de soporte compacto (de manera que para $|t| \rightarrow \infty$ los estados estacionarios son los del Hamiltoniano libre H_0).

En consecuencia, teniendo en cuenta que para el sistema libre $\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle_I = 1$ (estrictamente, $\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} E_0 T \right\}$, con $T \rightarrow \infty$), dado que ése es el estado de menor energía, vemos que la amplitud de probabilidad de transición de vacío a vacío en presencia de una fuerza externa dependiente del tiempo puede ser expresada como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}_0[F(t)] &:= \oint \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \frac{m}{2} \dot{q}(t)^2 - \frac{m\omega^2}{2} q(t)^2 + q(t) F(t) \right\}} = \\
 (1.126) \quad & = e^{\frac{i}{2m\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' F(t) G_F(t-t') F(t')},
 \end{aligned}$$

donde la integral funcional se extiende sobre un conjunto de trayectorias cerradas.

Consideremos ahora una variación infinitesimal de la fuerza externa, $\delta F(t)$, de soporte compacto. A primer orden podemos escribir

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}_0[F(t) + \delta F(t)] &= \\
 &= \langle 0, \infty | \mathbf{T} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} Q_I(t) F(t) dt \right\} \times \\
 &\times \left\{ 1 + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt Q_I(t) \delta F(t) \right\} | 0, -\infty \rangle = \\
 (1.127) \quad &= \oint \mathcal{D}q \, e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \frac{m}{2} \dot{q}(t)^2 - \frac{m\omega^2}{2} q(t)^2 + q(t) F(t) \right\}} \times \\
 &\times \left\{ 1 + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt q(t) \delta F(t) \right\},
 \end{aligned}$$

de donde resulta que la derivada funcional

$$\begin{aligned}
 -i\hbar \frac{\delta \mathcal{Z}_0[F(\cdot)]}{\delta F(t)} &= \\
 (1.128) \quad &= \langle 0, \infty | \mathbf{T} \left[\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} Q_I(t') F(t') dt' \right\} Q_I(t) \right] | 0, -\infty \rangle = \\
 &= \oint \mathcal{D}q \, e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left\{ \frac{m}{2} \dot{q}(t')^2 - \frac{m\omega^2}{2} q(t')^2 + q(t') F(t') \right\}} q(t).
 \end{aligned}$$

Este resultado se generaliza inmediatamente al caso de derivadas funcionales de orden superior,

$$\begin{aligned}
 (-i\hbar)^n \frac{\delta^n \mathcal{Z}_0[F(\cdot)]}{\delta F(t_1) \dots \delta F(t_n)} &= \\
 (1.129) \quad &\langle 0, \infty | \mathbf{T} \left[\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} Q_I(t') F(t') dt' \right\} Q_I(t_1) \dots Q_I(t_n) \right] | 0, -\infty \rangle = \\
 &\oint \mathcal{D}q \, e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left\{ \frac{m}{2} \dot{q}(t')^2 - \frac{m\omega^2}{2} q(t')^2 + q(t') F(t') \right\}} q(t_1) \dots q(t_n).
 \end{aligned}$$

Estas relaciones nos permite dar un desarrollo asintótico para la amplitud de probabilidad de persistencia del vacío para el caso de un potencial polinómico $V(q)$ arbitrario.

En efecto, si

$$(1.130) \quad V(q) = \frac{1}{2} m \omega^2 + V_{int}(q),$$

resulta inmediato mostrar que

$$(1.131) \quad \oint \mathcal{D}q \, e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \frac{m}{2} \dot{q}(t)^2 - V(q(t)) \right\}} =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle 0 | e^{-\frac{i}{\hbar} HT} | 0 \rangle =$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} V_{int} \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{\delta}{\delta F(t)} \right) dt} \mathcal{Z}_0[F(\cdot)] \Big|_{F \equiv 0},$$

donde $H = \frac{P^2}{2m} + V(Q)$, el vector $|0\rangle$ es el estado fundamental del Hamiltoniano $H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}$ y la funcional $\mathcal{Z}_0[F(\cdot)]$ está dada en la Ec. (1.126).

El desarrollo formal de la exponencial en el miembro de la derecha de la anterior igualdad, tomado hasta cierto orden en el potencial de interacción V_{int} y aplicado a la funcional $\mathcal{Z}_0[F(\cdot)]$, permite obtener un desarrollo asintótico en el cual aparece naturalmente la función de Green de Feynman, lo que corresponde al desarrollo en *diagramas de Feynman* de la Teoría Cuántica de Campos.

Los resultados hasta aquí obtenidos se generalizan directamente al caso de varios grados de libertad.

2. TRAYECTORIAS EN EL ESPACIO DE BARGMANN - FOCK

Cambiando la escala de los operadores P y Q según

$$(2.1) \quad P \rightarrow \sqrt{m \hbar \omega} P, \quad Q \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega}} Q,$$

de modo que los operadores P y Q resultantes sean hermíticos y sin dimensiones, con un conmutador

$$(2.2) \quad [P, Q] = -i,$$

el Hamiltoniano del oscilador armónico se reduce simplemente a

$$(2.3) \quad H_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \{P^2 + Q^2\} .$$

Los correspondientes *operadores de creación y destrucción* se definen como⁶

$$(2.5) \quad a := \frac{Q + \imath P}{\sqrt{2}} , \quad a^\dagger := \frac{Q - \imath P}{\sqrt{2}} ,$$

donde $a^\dagger$ es el adjunto de a , y se satisface que

$$(2.6) \quad [a, a^\dagger] = 1 , \quad H_0 = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) .$$

Los autovectores del operador (no hermítico) a ,

$$(2.7) \quad a|z\rangle = \frac{Q + \imath P}{\sqrt{2}} |z\rangle = z|z\rangle , \quad \text{con } z = x + \imath y \in \mathbb{C} ,$$

son los llamados *estados coherentes* del oscilador armónico.

Empleando la representación de estos operadores en el *espacio de configuración* obtenemos

$$(2.8) \quad \langle q|a|z\rangle = \mathbf{a}\langle q|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q + \frac{d}{dq} \right) \psi_z(q) = z \psi_z(q) ,$$

donde $\psi_z(q) = \langle q|z\rangle$. Esta ecuación implica que

$$(2.9) \quad \frac{d}{dq} \log \psi_z(q) = \sqrt{2} z - q = \frac{d}{dq} \left(\sqrt{2} z q - \frac{q^2}{2} \right) ,$$

de donde resulta que

$$(2.10) \quad \psi_z(q) = K(z) \exp \left\{ -\frac{q^2}{2} + \sqrt{2} z q \right\} \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}, dq) , \quad \forall z \in \mathbb{C} ,$$

donde $K(z)$ es una constante de normalización dada por

$$(2.11) \quad K(z) = \pi^{-1/4} e^{-\frac{\bar{z}z}{2}} e^{-\frac{z^2}{2}} ,$$

donde $\bar{z} = x - \imath y$.

⁶De donde resulta que

$$(2.4) \quad Q = \frac{a^\dagger + a}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad P = \imath \frac{a^\dagger - a}{\sqrt{2}} .$$

Puede verificarse que el conjunto $\{|z\rangle, z \in \mathbb{C}\}$ constituye un sistema (sobre)completo en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
 (2.12) \quad & \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} \langle q'|z\rangle \langle z|q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \times \\
 & \times \frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}(q^2 + q'^2)} e^{-2x^2} e^{\sqrt{2}x(q+q') + i\sqrt{2}y(q-q')} = \\
 & = \frac{2\pi}{\pi^{3/2}} \delta(\sqrt{2}(q-q')) e^{-\frac{1}{2}(q^2 + q'^2)} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-2x^2} e^{\sqrt{2}x(q+q')} = \\
 & = \frac{\delta(q-q')}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-(u^2 - 2uq + q^2)} = \delta(q-q'),
 \end{aligned}$$

donde hemos usado que $d\bar{z} dz \equiv 2i dx dy$.

Por lo tanto, tenemos la siguiente descomposición espectral de la identidad,

$$(2.13) \quad I = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} |z\rangle \langle z|,$$

y cualquier vector $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ puede ser escrito como

$$(2.14) \quad |\psi\rangle = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} |z\rangle \langle z|\psi\rangle.$$

Esto implica que la correspondiente función de onda está dada por

$$(2.15) \quad \psi(q) := \langle q|\psi\rangle = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} \langle q|z\rangle \langle z|\psi\rangle = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} \psi_z(q) \langle z|\psi\rangle,$$

con

$$(2.16) \quad \langle z|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \langle z|q\rangle \langle q|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi_z(q)^* \psi(q) = e^{-\frac{\bar{z}z}{2}} f(\bar{z}),$$

donde

$$(2.17) \quad f(\bar{z}) := \pi^{-1/4} \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-\frac{1}{2}(\bar{z}^2 - 2q\sqrt{2}\bar{z} + q^2)} \psi(q)$$

es una función *analítica entera* de la variable $\bar{z}$. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}
 (2.18) \quad & \left| \int_{-\infty}^{\infty} dq \left(\sqrt{2}q\right)^n e^{-\frac{1}{2}(q^2 - 2q\sqrt{2}\bar{z})} \psi(q) \right|^2 \leq \\
 & \leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dq \left(\sqrt{2}q\right)^{2n} e^{-\left(q^2 - q\sqrt{2}(\bar{z} + z)\right)} \right\} \|\psi(q)\|^2,
 \end{aligned}$$

de modo que converge absoluta y uniformemente en todo compacto del plano complejo $\bar{z}$. Por lo tanto, la integral en el miembro de la derecha de la Eq. (2.17) tiene derivadas continuas de todo orden.

Por su parte, la norma del vector de estado puede escribirse como

$$(2.19) \quad \|\psi\|^2 = \langle \psi | \psi \rangle = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} \langle \psi | z \rangle \langle z | \psi \rangle = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} e^{-\bar{z}z} f^*(z) f(\bar{z}).$$

Además, teniendo en cuenta que

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \langle z | w \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \langle z | q \rangle \langle q | w \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi_z(q)^* \psi_w(q) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\bar{z}z + \bar{z}^2)} e^{-\frac{1}{2}(\bar{w}w + w^2)} \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{\left\{-q^2 + 2q \frac{(\bar{z} + w)}{\sqrt{2}}\right\}} = \\ &= e^{-\frac{1}{2}(\bar{z}z + \bar{z}^2)} e^{-\frac{1}{2}(\bar{w}w + w^2)} e^{\frac{1}{2}(\bar{z} + w)^2} = e^{-\frac{1}{2}(\bar{z}z + \bar{w}w)} e^{\bar{z}w}, \end{aligned}$$

resulta que $f(\bar{z})$ satisface la relación

$$(2.21) \quad \begin{aligned} f(\bar{z}) &= e^{\frac{\bar{z}z}{2}} \langle z | \psi \rangle = e^{\frac{\bar{z}z}{2}} \int \frac{d\bar{w} dw}{2\pi i} \langle z | w \rangle \langle w | \psi \rangle = \\ &= e^{\frac{\bar{z}z}{2}} \int \frac{d\bar{w} dw}{2\pi i} e^{-\frac{1}{2}(\bar{z}z + \bar{w}w)} e^{\bar{z}w} e^{-\frac{\bar{w}w}{2}} f(\bar{w}) \\ &= \int \frac{d\bar{w} dw}{2\pi i} e^{\bar{z}w - \bar{w}w} f(\bar{w}). \end{aligned}$$

Vemos entonces que la proyección de los vectores de estado $|\psi\rangle$ sobre los vectores de la base de estados coherentes $|z\rangle$ corresponde a efectuar una transformación unitaria (isometría con inversa),

$$(2.22) \quad |\psi\rangle \leftrightarrow f(\bar{z}) \quad (\text{o, equivalentemente, } \psi(q) \leftrightarrow f(\bar{z}),)$$

que aplica $\mathcal{H}$ (o bien, $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}, dq)$) en un espacio de Hilbert formado por funciones enteras de la variable $\bar{z}$, de cuadrado integrable sobre el plano complejo respecto de la medida $\frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} e^{-\bar{z}z}$, y dotado de un *núcleo reproductor*

$$(2.23) \quad P(\bar{z}, w) := e^{\bar{z}w}.$$

El producto escalar en este espacio, que llamaremos de *Bargmann - Fock*, está dado por

$$(2.24) \quad \langle \psi | \chi \rangle = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} \langle \psi | z \rangle \langle z | \chi \rangle = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} e^{-\bar{z}z} f^*(z) g(\bar{z}),$$

donde $g(\bar{z}) = e^{\frac{1}{2}\bar{z}z} \langle z | \chi \rangle$.

En esta realización del espacio de Hilbert los operadores de creación y destrucción tienen la siguiente representación:

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \langle z | a^\dagger | \psi \rangle &= (a | z \rangle)^\dagger | \psi \rangle = (z | z \rangle)^\dagger | \psi \rangle = \bar{z} \langle z | \psi \rangle \\ \Rightarrow \quad a^\dagger f(\bar{z}) &= \bar{z} f(\bar{z}), \end{aligned}$$

y

$$(2.26) \quad \begin{aligned} \langle \psi | a | \chi \rangle &= (a^\dagger | \psi \rangle)^\dagger | \chi \rangle = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} e^{-\bar{z}z} (\bar{z} f(\bar{z}))^* g(\bar{z}) \\ &= \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} z e^{-\bar{z}z} f^*(z) g(\bar{z}) = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} \left\{ -\partial_{\bar{z}} e^{-\bar{z}z} \right\} f^*(z) g(\bar{z}) \\ &= \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} e^{-\bar{z}z} f^*(z) \partial_{\bar{z}} g(\bar{z}) \Rightarrow a g(\bar{z}) = \partial_{\bar{z}} g(\bar{z}), \end{aligned}$$

Entonces

$$(2.27) \quad a^\dagger \equiv \bar{z} \quad \text{y} \quad a \equiv \partial_{\bar{z}},$$

y se satisface que

$$(2.28) \quad [a, a^\dagger] = [\partial_{\bar{z}}, \bar{z}] = 1.$$

Con esta representación, el operador Hamiltoniano del oscilador armónico resulta

$$(2.29) \quad \mathfrak{H}_0 = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(\bar{z} \partial_{\bar{z}} + \frac{1}{2} \right),$$

y el operador número

$$(2.30) \quad \mathfrak{N} = a^\dagger a = \bar{z} \partial_{\bar{z}}.$$

Naturalmente, ambos son operadores hermíticos en el espacio de Bargmann - Fock, lo que es fácil de ver integrando por partes en el producto escalar

$$\begin{aligned}
 (2.31) \quad & \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} e^{-\bar{z}z} g^*(z) (\bar{z} \partial_{\bar{z}} f(\bar{z})) = \\
 & = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} \left(-\partial_z e^{-\bar{z}z} \right) g^*(z) (\partial_{\bar{z}} f(\bar{z})) = \\
 & = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} \left(-\partial_z z e^{-\bar{z}z} \right) g^*(z) f(\bar{z}) = \\
 & = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} e^{-\bar{z}z} (z \partial_z g^*(z)) f(\bar{z}) = \\
 & = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} e^{-\bar{z}z} (\bar{z} \partial_{\bar{z}} g(\bar{z}))^* f(\bar{z}) .
 \end{aligned}$$

El estado de vacío se define por

$$(2.32) \quad 0 = e^{\frac{\bar{z}z}{2}} \langle z | a | 0 \rangle = \mathfrak{a} f_0(\bar{z}) = \partial_{\bar{z}} f_0(\bar{z}) \quad \Rightarrow \quad f_0(\bar{z}) \equiv 1 ,$$

donde $f_0(\bar{z})$ está correctamente normalizado dado que

$$(2.33) \quad \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} e^{-\bar{z}z} |f_0(z)|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x^2 + y^2)} = 1 .$$

Por su parte, los estados excitados están dados por

$$(2.34) \quad f_n(\bar{z}) = e^{\frac{\bar{z}z}{2}} \langle z | n \rangle = e^{\frac{\bar{z}z}{2}} \langle z | \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} | 0 \rangle = \frac{\mathfrak{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} f_0(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} .$$

Resulta evidente que

$$(2.35) \quad \mathfrak{N} f_n(\bar{z}) = \bar{z} \partial_{\bar{z}} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} = n f_n(\bar{z})$$

y

$$(2.36) \quad \mathfrak{H}_0 f_n(\bar{z}) = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) f_n(\bar{z}) .$$

Es inmediato verificar que los estados estacionarios así obtenidos (que forman un sistema completo) son ortonormales. En efecto, sin pérdida de generalidad

podemos suponer que $n \geq m$ en el producto escalar

$$\begin{aligned}
 \langle n | m \rangle &= \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} e^{-\bar{z}z} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \frac{\bar{z}^m}{\sqrt{m!}} = \\
 (2.37) \quad &= \frac{1}{\sqrt{n! m!}} \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} \left\{ (-\partial_{\bar{z}})^n e^{-\bar{z}z} \right\} \bar{z}^m = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n! m!}} \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} e^{-\bar{z}z} \left\{ (\partial_{\bar{z}})^n \bar{z}^m \right\} = \delta_{nm}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, señalemos que la evolución temporal de la función de onda en el espacio de Bargmann - Fock, $f(\bar{z})$, está dada por

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{\bar{z}z}{2}} \langle z | e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | \psi \rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} \mathfrak{H} t} f(\bar{z}) = \\
 (2.38) \quad &= e^{-\frac{i}{2} \omega t} e^{-i \omega t \bar{z} \partial_{\bar{z}}} f(\bar{z}) = e^{-\frac{i}{2} \omega t} f(e^{-i \omega t} \bar{z}).
 \end{aligned}$$

2.1. Operadores en el espacio de Bargmann - Fock. Consideremos ahora un operador A , definido en $\mathcal{H}$, que tiene un desarrollo de la forma

$$(2.39) \quad A = \sum_{n,m=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| A |m\rangle \langle m| = \sum_{n,m=0}^{\infty} |n\rangle A_{nm} \langle m|.$$

Entonces, de la Ec. (2.34) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \langle z | A | w \rangle &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \langle z | n \rangle A_{nm} \langle m | w \rangle = \\
 (2.40) \quad &= e^{-\frac{\bar{z}z}{2}} e^{-\frac{\bar{w}w}{2}} \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} \frac{w^m}{\sqrt{m!}} = e^{-\frac{\bar{z}z}{2}} e^{-\frac{\bar{w}w}{2}} A(\bar{z}, w),
 \end{aligned}$$

donde hemos llamado

$$(2.41) \quad A(\bar{z}, w) := \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} \frac{w^m}{\sqrt{m!}}$$

que, para A_{nm} suficientemente bien comportado, será una función analítica de $\bar{z}$ y de w .

La acción de A sobre un vector de estado puede describirse como

$$\begin{aligned}
 \langle z | A | \psi \rangle &= \int \frac{d\bar{w} dw}{2\pi i} \langle z | A | w \rangle \langle w | \psi \rangle \\
 (2.42) \quad &= e^{-\frac{\bar{z}z}{2}} \int \frac{d\bar{w} dw}{2\pi i} e^{-\bar{w}w} A(\bar{z}, w) f(\bar{w}) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \mathcal{A} f(\bar{z}) = \int \frac{d\bar{w} dw}{2\pi i} e^{-\bar{w}w} A(\bar{z}, w) f(\bar{w}).
 \end{aligned}$$

De ese modo, A actúa sobre el espacio de Bargmann - Fock como un *operador integral* de núcleo $A(\bar{z}, w)$.

En particular, el núcleo del operador identidad está dado por

$$(2.43) \quad I(\bar{z}, w) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \delta_{nm} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} \frac{w^m}{\sqrt{m!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{z}w)^n}{n!} = e^{\bar{z}w},$$

que es precisamente el núcleo reproductor del espacio.

Similarmente, se puede ver que el núcleo de la composición de dos operadores está dado por

$$(2.44) \quad (AB)(\bar{z}, v) = \int \frac{d\bar{w} dw}{2\pi i} e^{-\bar{w}w} A(\bar{z}, w) B(\bar{w}, v).$$

La *traza* del operador A se define por

$$\begin{aligned}
 \text{Tr } A &:= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | A | n \rangle = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | z \rangle \langle z | A | n \rangle = \\
 (2.45) \quad &= \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} \langle z | A \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| \right\} | z \rangle = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} \langle z | A | z \rangle.
 \end{aligned}$$

Haciendo uso de la Ec. (2.40) obtenemos

$$(2.46) \quad \text{Tr } A = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} e^{-\bar{z}z} A(\bar{z}, z).$$

Para llevar al operador A al *orden normal*, a partir de la Ec. (2.39) escribimos

$$(2.47) \quad A = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle \langle 0| \frac{a^m}{\sqrt{m!}}.$$

Señalemos que

$$(2.48) \quad |0\rangle \langle 0| \equiv : e^{-a^\dagger a} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (a^\dagger)^n a^n.$$

En efecto, tenemos que el conmutador

$$\begin{aligned}
 (2.49) \quad & \left[: e^{-a^\dagger a} :, a^\dagger \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (a^\dagger)^n [a^n, a^\dagger] = \\
 & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (a^\dagger)^n n a^{n-1} = -a^\dagger : e^{-a^\dagger a} : \Rightarrow \\
 & \Rightarrow : e^{-a^\dagger a} : a^\dagger = 0.
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$(2.50) \quad : e^{-a^\dagger a} : |n\rangle = 0, \quad \text{para } n > 0,$$

mientras que

$$(2.51) \quad : e^{-a^\dagger a} : |0\rangle = |0\rangle.$$

Por lo tanto, la Ec. (2.47) puede ser escrita como

$$\begin{aligned}
 (2.52) \quad & A = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} : \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} e^{-a^\dagger a} \frac{a^m}{\sqrt{m!}} := \\
 & = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{A_{nm}}{\sqrt{n! m!}} a^{\dagger(n+k)} a^{(m+k)} =: \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{A_{nm}^N}{\sqrt{n! m!}} a^{\dagger n} a^m,
 \end{aligned}$$

lo que define los coeficientes A_{nm}^N del desarrollo de a en orden normal.

Teniendo en cuenta la representación de los operadores de creación y destrucción en el espacio de Bargmann - Fock, Ec. (2.27), podemos escribir que

$$(2.53) \quad \mathcal{A}f(\bar{z}) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{A_{nm}^N}{\sqrt{n! m!}} \bar{z}^n \partial_{\bar{z}}^m f(\bar{z}),$$

o bien, empleando el núcleo reproductor del espacio, Ec. (2.21),

$$\begin{aligned}
 (2.54) \quad & \mathcal{A}f(\bar{z}) = \int \frac{d\bar{w} dw}{2\pi i} e^{-\bar{w}w} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{A_{nm}^N}{\sqrt{n! m!}} \bar{z}^n \partial_{\bar{z}}^m e^{\bar{z}w} f(\bar{w}) = \\
 & = \int \frac{d\bar{w} dw}{2\pi i} e^{-\bar{w}w + \bar{z}w} \left\{ \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{A_{nm}^N}{\sqrt{n! m!}} \bar{z}^n w^m \right\} f(\bar{w}) = \\
 & = \int \frac{d\bar{w} dw}{2\pi i} e^{-\bar{w}w + \bar{z}w} A^N(\bar{z}, w) f(\bar{w}),
 \end{aligned}$$

donde el núcleo auxiliar $A^N(\bar{z}, w)$ se obtiene del desarrollo de A en orden normal cambiando $a^\dagger \rightarrow \bar{z}$ y $a \rightarrow w$.

De allí surge que el núcleo del operador integral $\mathcal{A}$ también puede ser escrito como

$$(2.55) \quad A(\bar{z}, w) = e^{\bar{z}w} A^N(\bar{z}, w),$$

lo que simplifica su cálculo. Además, reemplazando en la expresión de la traza, Ec. (2.46), también resulta que

$$(2.56) \quad \text{Tr } A = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} A^N(\bar{z}, z).$$

2.2. Integrales de camino en el espacio de Bargmann - Fock. Estamos ahora en condiciones de considerar el núcleo del operador de evolución de una partícula en su representación como operador integral sobre el espacio de Bargmann - Fock.

Supondremos que el Hamiltoniano de una partícula sometida a la acción de un potencial $V(Q) = \frac{1}{2} m \omega^2 Q^2 + \dots$, donde los puntos suspensivos representan términos de órdenes diferente del cuadrático (que pueden incluso tener una dependencia *suave* en el tiempo), ha sido expresado en términos de los operadores $a^\dagger$ y a y llevado al orden normal,

$$(2.57) \quad H = H(a^\dagger, a; t) = : H(a^\dagger, a; t) : .$$

Entonces, el operador de evolución de la descripción de Schödinger correspondiente a un intervalo de tiempo infinitesimal $(t + \Delta t, t)$ está dado por

$$(2.58) \quad U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(a^\dagger, a; t) \Delta t} = 1 - \frac{i}{\hbar} H(a^\dagger, a; t) \Delta t + O(\Delta t^2),$$

donde los dos primeros términos del desarrollo del miembro de la derecha están expresados en orden normal.

El correspondiente núcleo auxiliar es

$$(2.59) \quad U^N(\bar{z}, t + \Delta t; w, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(\bar{z}, w; t) \Delta t} (1 + O(\Delta t^2)),$$

y para su núcleo como operador integral tenemos

$$(2.60) \quad U(\bar{z}, t + \Delta t; w, t) = e^{\bar{z}w - \frac{i}{\hbar} H(\bar{z}, w; t) \Delta t} (1 + O(\Delta t^2)).$$

De la composición de operadores sobre el espacio de Bargmann - Fock, Ec. (2.44), resulta que

(2.61)

$$\begin{aligned}
U(\bar{z}, t + 2\Delta t; w, t) &= \\
&= \int \frac{d\bar{\eta} d\eta}{2\pi i} e^{-\bar{\eta}\eta} U(\bar{z}, t + 2\Delta t; \eta, t + \Delta t) U(\bar{\eta}, t + \Delta t; w, t) = \\
&= \int \frac{d\bar{\eta} d\eta}{2\pi i} e^{-\bar{\eta}\eta} e^{\bar{z}\eta - \frac{i}{\hbar} H(\bar{z}, \eta; t + \Delta t) \Delta t} e^{\bar{\eta}w - \frac{i}{\hbar} H(\bar{\eta}, w; t) \Delta t} \times \\
&\times (1 + O(\Delta t^2))^2 = \int \frac{d\bar{\eta} d\eta}{2\pi i} e^{\frac{1}{2}(\bar{z}\eta + \bar{\eta}w)} e^{\frac{1}{2}\{(\bar{z} - \bar{\eta})\eta - \bar{\eta}(\eta - w)\}} \times \\
&\times e^{-\frac{i}{\hbar} \{H(\bar{z}, \eta; t + \Delta t) + H(\bar{\eta}, w; t)\} \Delta t} (1 + O(\Delta t^2))^2.
\end{aligned}$$

Para un intervalo de tiempo finito, (t_i, t_f) , tomando $\Delta t = \frac{t_f - t_i}{N}$ con $N \gg 1$, podemos escribir para el núcleo del operador de evolución de la descripción de Schödinger

$$\begin{aligned}
(2.62) \quad U(\bar{z}_f, t_f; z_i, t_i) &= \int \left(\prod_{n=1}^{N-1} \frac{d\bar{z}_n dz_n}{2\pi i} \right) e^{\frac{1}{2}(\bar{z}_f z_{N-1} + \bar{z}_1 z_i)} \times \\
&\times e^{i \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \left[\left(\frac{\bar{z}_{n+1} - \bar{z}_n}{2i\Delta t} \right) z_n - \bar{z}_n \left(\frac{z_n - z_{n-1}}{2i\Delta t} \right) \right]} \times \\
&\times e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} H(\bar{z}_{n+1}, z_n; t_n)} (1 + O(N^{-1})),
\end{aligned}$$

donde hemos llamado $t_n := t_i + n\Delta t$, $z_0 := z_i$ y $\bar{z}_N := \bar{z}_f$.

El límite para $N \rightarrow \infty$ del miembro de la derecha será denotado por

$$\begin{aligned}
 (2.63) \quad U(\bar{z}_f, t_f; z_i, t_i) &= \int_{z(t_i)=z_i}^{\bar{z}(t_f)=\bar{z}_f} \mathcal{D}[\bar{z}(t), z(t)] e^{\frac{1}{2}[\bar{z}_f z(t_f) + \bar{z}(t_i) z_i]} \times \\
 &\times e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{\hbar}{2i} [\dot{\bar{z}}(t) z(t) - \bar{z}(t) \dot{z}(t)] - H(\bar{z}(t), z(t); t) \right\}} \simeq \\
 &\simeq \left(\mathbf{T} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt H(a^\dagger, a; t) \right\} \right) (\bar{z}_f, z_i),
 \end{aligned}$$

lo que se interpreta como una suma de contribuciones provenientes de trayectorias continuas en el plano complejo, $(z(t), \bar{z}(t))$, que satisfacen las condiciones (inicial y final respectivamente) $z(t_i) = z_i$ y $\bar{z}(t_f) = \bar{z}_f$.

Nótese que $\bar{z}(t)$ *no es* la compleja conjugada de $z(t)$, de manera que $\bar{z}(t_i)$ es el valor (*no condicionado*) que adopta de la trayectoria $\bar{z}(t)$ en $t = t_i$. Similarmente, $z(t_f)$ es el valor que la trayectoria $z(t)$ toma en $t = t_f$. En consecuencia, el primer factor exponencial en el integrando del segundo miembro depende de la trayectoria y no puede ser extraído fuera de la integral funcional.

Señalemos que el argumento de la exponencial en el integrando del segundo miembro de la Ec. (2.63) puede ser entendido (a menos de términos de borde) como la acción clásica de la partícula expresada en términos de las combinaciones linealmente independientes de la coordenada y el impulso dadas por

$$(2.64) \quad z = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(q + i \frac{p}{m\omega} \right), \quad \bar{z} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(q - i \frac{p}{m\omega} \right).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
 (2.65) \quad \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\hbar}{2i} [\dot{\bar{z}}(t) z(t) - \bar{z}(t) \dot{z}(t)] &= \frac{m\omega}{4i} \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{2i}{m\omega} [p \dot{q} - \dot{p} q] = \\
 &= -\frac{1}{2} p q \Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} dt p \dot{q}.
 \end{aligned}$$

Por su parte, la medida de integración así expresada se reduce a

$$(2.66) \quad \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} = \left(\frac{m\omega}{4\pi i \hbar} \right) \frac{2i}{m\omega} dp dq = \frac{dp dq}{2\pi \hbar},$$

lo que muestra que se trata de una suma de contribuciones provenientes de trayectorias sobre el espacio de fase, con condiciones iniciales especificadas para la combinación $(q + i \frac{p}{m\omega})$ y finales para $(q - i \frac{p}{m\omega})$.

En particular, esto muestra que la convergencia de las integrales en el segundo miembro de la Ec. (2.62) requiere (como anteriormente) de la introducción de una parte imaginaria negativa en la variable temporal: $t \rightarrow t(1 - i\varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$.

Estos resultados se extienden directamente al caso de varios grados de libertad.

Para el cálculo efectivo de integrales funcionales en esta formulación (también llamada *holomorfa*) es necesario recurrir al siguiente resultado.

Consideremos una matriz no singular M cuya parte hermítica, $\frac{1}{2}(M + M^\dagger)$, sea positiva definida. Entonces, si llamamos

$$(2.67) \quad \bar{Z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \dots & \bar{z}_N \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix},$$

y similarmente para $\bar{W}$ y W , tenemos que

$$(2.68) \quad \int \left(\prod_{n=1}^N \frac{d\bar{z}_n dz_n}{2\pi i} \right) e^{-\bar{Z}MZ + \bar{W}Z + \bar{Z}W} = (\det M)^{-1} e^{\bar{W}M^{-1}W}.$$

En efecto, si $M = H + iA$, con H, A matrices hermíticas y H positiva definida, entonces una transformación unitaria U_1 seguida de un cambio en la escala de las variables de integración permite llevar $H \rightarrow \mathbf{1}$, donde $\mathbf{1}$ es la matriz identidad de $N \times N$:

$$(2.69) \quad H = U_1^\dagger \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_N) U_1,$$

con $h_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, N$. Esas dos transformaciones tienen asociado un Jacobiano igual a $(\det H)^{-1}$, e implican el cambio

$$(2.70) \quad \bar{W} \rightarrow \bar{W}' = \bar{W} U_1^\dagger [\text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_N)]^{-\frac{1}{2}},$$

$$W \rightarrow W' = [\text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_N)]^{-\frac{1}{2}} U_1 W.$$

Por lo tanto, en lo que sigue es suficiente considerar $M = \mathbf{1} + iA_1$, donde

$$(2.71) \quad A_1 = [\text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_N)]^{-\frac{1}{2}} U_1 A U_1^\dagger [\text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_N)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Pero $A_1 = A_1^\dagger$ también es llevada a una forma diagonal y real por cierta transformación unitaria U_2 ,

$$(2.72) \quad A_1 = U_2^\dagger \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_N) U_2,$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \dots, N$.

De ese modo, llamando $\bar{W}'' = \bar{W}' U_2^\dagger$ y $W'' = U_2 W'$, podemos escribir la integral múltiple como

$$\begin{aligned}
 (2.73) \quad & \int \left(\prod_{n=1}^N \frac{d\bar{z}_n dz_n}{2\pi i} \right) e^{-\sum_{k=1}^N \bar{z}_k (1 + \imath a_k) z_k + \bar{W}'' Z + \bar{Z} W''} = \\
 & = \frac{e^{\bar{W}'' [\text{diag}(1 + \imath a_1, 1 + \imath a_2, \dots, 1 + \imath a_N)]^{-1} W''}}{\det(\mathbf{1} + \imath A_1)} = \\
 & = \frac{\det H}{\det(H + \imath A)} e^{\bar{W} [H + \imath A]^{-1} W},
 \end{aligned}$$

donde hemos usado las Ec. (2.70 - 2.71).

Finalmente, multiplicando por $(\det H)^{-1}$ obtenemos el segundo miembro de la Ec. (2.68).

2.3. La función de partición. Tomando $t_f - t_i \rightarrow -\imath\beta$ y haciendo uso de la Ec. (2.46), obtenemos la siguiente representación para la función de partición de un sistema descrito por un Hamiltoniano independiente del tiempo,

$$\begin{aligned}
 (2.74) \quad & Z(\beta) = \text{Tr} \left\{ e^{-\frac{\beta}{\hbar} H} \right\} = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} e^{-\bar{z} z} U(\bar{z}, -\imath\beta; z, 0) = \\
 & = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} e^{-\bar{z} z} \int_{z(0)=z}^{\bar{z}(\beta)=\bar{z}} \mathcal{D}[\bar{z}(\tau), z(\tau)] e^{\frac{1}{2} [\bar{z} z(\beta) + \bar{z}(0) z]} \times \\
 & \times e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^\beta d\tau \left\{ \frac{\hbar}{2} [\bar{z}(\tau) \dot{z}(\tau) - \dot{\bar{z}}(\tau) z(\tau)] + H(\bar{z}(\tau), z(\tau)) \right\}} = \\
 & = \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi i} \int_{z(0)=z}^{\bar{z}(\beta)=\bar{z}} \mathcal{D}[\bar{z}(\tau), z(\tau)] e^{[\bar{z}(0) - \bar{z}] z} \times \\
 & \times e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^\beta d\tau \left\{ \hbar \bar{z}(\tau) \dot{z}(\tau) + H(\bar{z}(\tau), z(\tau)) \right\}},
 \end{aligned}$$

donde hemos integrado por partes el término $\dot{\bar{z}}(\tau) z(\tau)$ en el argumento de la exponencial.

La integral funcional resultante puede ser interpretada como una suma de contribuciones provenientes de un conjunto de trayectorias continuas en el plano complejo, $(\bar{z}(\tau), z(\tau))$, donde la condición final para la primera es la compleja conjugada

de la condición inicial para la segunda (valores sobre los cuales también se integra finalmente).

Señalemos que también es posible expresar formalmente la función de partición como una suma sobre trayectorias no condicionadas, siempre que se introduzcan *deltas de Dirac* que impongan las anteriores condiciones,

$$\begin{aligned}
 Z(\beta) &= \int d\bar{z} dz \int \mathcal{D}[\bar{z}(\tau), z(\tau)] \delta(z - z(0)) \delta(\bar{z} - \bar{z}(\beta)) \times \\
 &\times e^{[\bar{z}(0) - \bar{z}]z} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^\beta d\tau \{ \hbar \bar{z}(\tau) \dot{z}(\tau) + H(\bar{z}(\tau), z(\tau)) \}} = \\
 (2.75) \quad &= \int \mathcal{D}[\bar{z}(\tau), z(\tau)] e^{i \left[\frac{\bar{z}(0) - \bar{z}(\beta)}{i} \right] z(0)} \times \\
 &\times e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^\beta d\tau \{ \hbar \bar{z}(\tau) \dot{z}(\tau) + H(\bar{z}(\tau), z(\tau)) \}}.
 \end{aligned}$$

Pero, a partir de esta expresión, se puede argumentar que al integrar sobre todos los posibles valores que $z(\tau)$ puede tomar en $\tau = 0$ se origina un factor $i\delta(\bar{z}(0) - \bar{z}(\beta))$, lo que sugiere que sólo contribuyen a la función de partición las trayectorias $\bar{z}(\tau)$ cerradas.

Integrando por partes el término $\bar{z}(\tau)\dot{z}(\tau)$ en la segunda exponencial del integrando de la Ec. (2.74) se llega a la misma conclusión para la trayectoria $z(\tau)$.

Por lo tanto, la función de partición admite ser representada formalmente como una integral funcional sobre trayectorias complejas cerradas, lo que expresaremos como

$$(2.76) \quad Z(\beta) = \oint \mathcal{D}[\bar{z}(\tau), z(\tau)] e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^\beta d\tau \{ \hbar \bar{z}(\tau) \dot{z}(\tau) + H(\bar{z}(\tau), z(\tau)) \}}.$$

Esta interpretación se ve reforzada al considerar un Hamiltoniano cuadrático, $H = \hbar\omega\bar{z}z$, para el cual

$$(2.77) \quad Z_0(\beta) = \oint \mathcal{D}[\bar{z}(\tau), z(\tau)] e^{-\int_0^\beta d\tau \bar{z}(\tau) [\partial_\tau + \omega] z(\tau)}.$$

Por lo que hemos visto anteriormente, esta integral funcional toma el valor de la inversa del determinante funcional (regularizado) del operador diferencial de

primer orden $D = [\partial_\tau + \omega]$ definido sobre un dominio de funciones que satisfacen la condición de contorno $z(\beta) = z(0)$.

El adjunto de ese operador resulta ser el operador $D^\dagger = [-\partial_\tau + \omega]$ con dominio de definición en el conjunto de funciones que también satisfacen la propiedad $\bar{z}(\beta) = \bar{z}(0)$.

Dado que la función de partición toma valores no negativos, podemos *definir* el resultado de la integral funcional de la Ec. (2.77) como proporcional a la potencia $(-\frac{1}{2})$ del determinante funcional de la composición $D^\dagger D = -\partial_\tau^2 + \omega^2$, la que sólo es posible en el dominio restringido (pero denso) de las funciones *periódicas* (es decir, las que satisfacen además que $z'(\beta) = z'(0)$). Tenemos entonces que

$$(2.78) \quad Z_0(\beta) \sim \left\{ \text{Det} [-\partial_\tau^2 + \omega^2] \big|_{\text{c.c. per.}} \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

con lo que recuperamos el resultado obtenido en la Ec. (1.89) del primer capítulo.

2.4. Ejemplo: el oscilador armónico forzado en el espacio de Bargmann

- **Fock.** Consideremos el Hamiltoniano dependiente del tiempo de la forma

$$(2.79) \quad H(a^\dagger, a; t) = \hbar \{ \omega a^\dagger a - f(t) a^\dagger - f^*(t) a \},$$

de donde resulta que el núcleo auxiliar

$$(2.80) \quad H^N(\bar{z}, w; t) = H(\bar{z}, w; t) = \hbar \{ \omega \bar{z} w - f(t) \bar{z} - f^*(t) w \}.$$

Reemplazando en la Ec. (2.63) obtenemos

$$(2.81) \quad U(\bar{z}_f, t_f; z_i, t_i) = \int_{z(t_i)=z_i}^{\bar{z}(t_f)=\bar{z}_f} \mathcal{D}[\bar{z}(t), z(t)] e^{\frac{1}{2} [\bar{z}_f z(t_f) + \bar{z}(t_i) z_i]} \times \\ \times e^{\imath \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{1}{2\imath} [\dot{\bar{z}}(t) z(t) - \bar{z}(t) \dot{z}(t)] - [\omega \bar{z}(t) z(t) - f(t) \bar{z}(t) - f^*(t) z(t)] \right\}}.$$

Busquemos las *trayectorias clásicas* de este sistema físico, vale decir, aquellas trayectorias $(\bar{z}(t), z(t))$ que satisfacen las condiciones inicial y final especificadas en los límites de la integral funcional y que hacen que el argumento de la exponencial en el integrando tome un valor extremo. Esas trayectorias están determinadas por las ecuaciones

$$(2.82) \quad \frac{1}{\hbar} \frac{\delta}{\delta \bar{z}(t)} \int_{t_i}^{t_f} dt' \left\{ \frac{\hbar}{2\imath} [\dot{\bar{z}}(t') z(t') - \bar{z}(t') \dot{z}(t')] - H(\bar{z}(t'), z(t'); t') \right\} =$$

$$= \imath \dot{z}(t) - \omega z(t) + f(t) = 0, \quad z(t_i) = z_i,$$

y

$$\begin{aligned}
(2.83) \quad & \frac{1}{\hbar} \frac{\delta}{\delta z(t)} \int_{t_i}^{t_f} dt' \left\{ \frac{\hbar}{2i} [\dot{\bar{z}}(t') z(t') - \bar{z}(t') \dot{z}(t')] - H(\bar{z}(t'), z(t'); t') \right\} = \\
& = -i \dot{\bar{z}}(t) - \omega \bar{z}(t) + f^*(t) = 0, \quad \bar{z}(t_f) = \bar{z}_f,
\end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned}
(2.84) \quad & z(t) = z_i e^{-i\omega(t-t_i)} + i \int_{t_i}^t dt' e^{-i\omega(t-t')} f(t'), \\
& \bar{z}(t) = \bar{z}_f e^{-i\omega(t_f-t)} + i \int_t^{t_f} dt' e^{-i\omega(t'-t)} f^*(t').
\end{aligned}$$

Reemplazadas en el argumento de la exponencial obtenemos

$$\begin{aligned}
(2.85) \quad & \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{\hbar}{2i} [\dot{\bar{z}}(t) z(t) - \bar{z}(t) \dot{z}(t)] - H(\bar{z}(t), z(t); t) \right\} = \\
& = \frac{i}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \{ f(t) \bar{z}(t) + f^*(t) z(t) \} = \\
& = \frac{i}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt f(t) \left\{ \bar{z}_f e^{-i\omega(t_f-t)} + i \int_t^{t_f} dt' e^{-i\omega(t'-t)} f^*(t') \right\} + \\
& + \frac{i}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt f^*(t) \left\{ z_i e^{-i\omega(t-t_i)} + i \int_{t_i}^t dt' e^{-i\omega(t-t')} f(t') \right\} = \\
& = \frac{i}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \bar{z}_f e^{-i\omega(t_f-t)} f(t) + f^*(t) e^{-i\omega(t-t_i)} z_i \right\} - \\
& - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt' f^*(t) \left\{ \theta(t-t') e^{-i\omega(t-t')} + \right. \\
& \left. + \theta(t'-t) e^{-i\omega(t'-t)} \right\} f(t').
\end{aligned}$$

Por su parte, el exponente del otro factor en el integrando del miembro de la derecha de la Ec. (2.81) (que sólo depende de los valores en los extremos) evaluado en las soluciones clásicas resulta ser

$$\begin{aligned}
(2.86) \quad & \frac{1}{2} [\bar{z}_f z(t_f) + \bar{z}(t_i) z_i] = \bar{z}_f e^{-i\omega(t_f-t_i)} z_i + \\
& + \frac{i}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \bar{z}_f e^{-i\omega(t_f-t)} f(t) + f^*(t) e^{-i\omega(t-t_i)} z_i \right\}.
\end{aligned}$$

La suma de los miembros de la derecha de las Ecs. (2.85) y (2.86) da $\frac{i}{\hbar}$ veces la acción clásica evaluada en las trayectorias clásicas, $S(\bar{z}_f, t_f; z_i, t_i)$.

Nótese que, con t cambiado por $t(1 - i\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$, los factores $e^{-i\omega(t_f - t_i)}$, $e^{-i\omega(t_f - t)}$ y $e^{-i\omega(t - t_i)}$ tienden exponencialmente a cero cuando $t_f \rightarrow \infty$ y $t_i \rightarrow -\infty$, de modo que el segundo miembro de la Ec. (2.86) tiende a 0, mientras que del miembro de la derecha de la Ec. (2.85) sólo sobrevive el término

$$(2.87) \quad i\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' f^*(t) G_F(t - t') f(t'),$$

donde la función de Green de Feynman ha sido definida en la Ec. (1.124).

Ahora bien, aprovechando que la medida de integración en la integral funcional de la Ec. (2.81) es invariante frente a traslaciones, hacemos el cambio en las variables de integración $\bar{z}(t) \rightarrow \bar{z}(t) + \bar{w}(t)$ y $z(t) \rightarrow z(t) + w(t)$, con $w(t_i) = 0$ y $\bar{w}(t_f) = 0$. Teniendo en cuenta las ecuaciones que satisfacen las soluciones clásicas, Ecs. (2.82) y (2.83), obtenemos para el núcleo del operador de evolución

$$(2.88) \quad U(\bar{z}_f, t_f; z_i, t_i) = e^{\frac{i}{\hbar} S(\bar{z}_f, t_f; z_i, t_i)} \times \\ \times \int_{w(t_i)=0}^{\bar{w}(t_f)=0} \mathcal{D}[\bar{w}(t), w(t)] e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt \bar{w}(t) (i\partial_t - \omega) w(t)},$$

donde toda la dependencia en $\bar{z}_f$ y z_i está contenida en el primer factor. La integral funcional remanente, que corresponde a un factor constante $\mathcal{N}(t_f - t_i)$, puede ser interpretada como proporcional a la potencia (-1) del determinante funcional (regularizado) del operador diferencial de primer orden $(i\partial_t - \omega)$ con dominio de definición en las funciones que satisfacen la condición de Dirichlet en $t = t_i$, $w(t_i) = 0$.

Podemos determinar esa constante $\mathcal{N}(t_f - t_i)$ considerando el caso en que $f(t) \equiv 0$, para el cual la acción clásica se reduce simplemente a (ver Ecs. (2.85) y (2.86))

$$(2.89) \quad \frac{i}{\hbar} S(\bar{z}_f, t_f; z_i, t_i) = \bar{z}_f e^{-i\omega(t_f - t_i)} z_i.$$

Tomando $t_f - t_i \rightarrow -\imath\beta$, tenemos que la función de partición del oscilador armónico libre (descrito por el Hamiltoniano $\hbar\omega a^\dagger a$, sustraída la energía del vacío) es

$$\begin{aligned}
 Z(\beta) &= \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi\imath} e^{-\bar{z}z} U(\bar{z}, -\imath\beta; z, 0) = \\
 (2.90) \quad &= \mathcal{N}(-\imath\beta) \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi\imath} e^{-\bar{z}z} \left(1 - e^{-\beta\omega}\right) z = \frac{\mathcal{N}(-\imath\beta)}{1 - e^{-\beta\omega}} = \\
 &= \mathcal{N}(-\imath\beta) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\omega n},
 \end{aligned}$$

de donde resulta que $\mathcal{N}(-\imath\beta) = 1 \Rightarrow \mathcal{N}(T) = 1$.

Por lo tanto,

$$(2.91) \quad U(\bar{z}_f, t_f; z_i, t_i) = e^{\frac{\imath}{\hbar} S(\bar{z}_f, t_f; z_i, t_i)}$$

que, con $t_i = -\frac{T}{2}$ y $t_f = \frac{T}{2}$, se comporta para $T \rightarrow \infty$ como

$$\begin{aligned}
 &U(\bar{z}_f, \infty; z_i, -\infty) = \\
 (2.92) \quad &= e^{\imath\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' f^*(t) G_F(t-t') f(t')}.
 \end{aligned}$$

Tomando la traza del operador de evolución obtenemos

$$\begin{aligned}
 &\lim_{T \rightarrow \infty} \int \frac{d\bar{z} dz}{2\pi\imath} e^{-\bar{z}z} U(\bar{z}, T/2; z, -T/2) = \\
 (2.93) \quad &= e^{\imath\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' f^*(t) G_F(t-t') f(t')}.
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el término de acoplamiento con la fuente externa es

$$\begin{aligned}
 (2.94) \quad &-\hbar f(t) a^\dagger - \hbar f^*(t) a = -\hbar f(t) \frac{Q - \imath P}{\sqrt{2}} - \hbar f^*(t) \frac{Q + \imath P}{\sqrt{2}} = \\
 &= -\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (f(t) + f^*(t)) \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} Q + \imath \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (f(t) - f^*(t)) \sqrt{m\omega\hbar} P,
 \end{aligned}$$

vemos que tomando $f(t)$ real e identificando

$$(2.95) \quad F(t) = \sqrt{2m\omega\hbar} f(t),$$

el segundo miembro de la Ec. (2.93) resulta

$$\begin{aligned}
 (2.96) \quad & e^{i\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t) G_F(t-t') f(t')} = \\
 & = e^{\frac{i}{2m\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' F(t) G_F(t-t') F(t')} = \mathcal{Z}_0[F(t)] ,
 \end{aligned}$$

con lo que recuperamos el resultado de la Ec. (1.125) para la funcional generatriz.

3. INTEGRALES FUNCIONALES PARA SISTEMAS FERMIÓNICOS

Consideremos un *oscilador fermiónico*, sistema de un único grado de libertad cuyo Hamiltoniano está dado por⁷

$$(3.4) \quad H = \hbar\omega \frac{1}{2} (a^\dagger a - a a^\dagger) = \hbar\omega \left(a^\dagger a - \frac{1}{2} \right) ,$$

donde los operadores de *creación* y *destrucción* satisfacen

$$(3.5) \quad \{a, a^\dagger\} = a a^\dagger + a^\dagger a = 1, \quad a^2 = 0, \quad a^{\dagger 2} = 0,$$

lo que implica que el espacio de estados es bidimensional. En efecto, el *estado de vacío* $|0\rangle$ se define por

$$(3.6) \quad a|0\rangle = 0,$$

mientras que el estado *con una partícula* se obtiene como

$$(3.7) \quad |1\rangle = a^\dagger |0\rangle,$$

y satisface $a^\dagger |1\rangle = 0$.

⁷En la representación $j = \frac{1}{2}$ del grupo $SU(2)$, los generadores satisfacen

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad & J_+ J_- = J^2 - J_3^2 + J_3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + J_3 = \frac{1}{2} + J_3, \\
 & J_- J_+ = J^2 - J_3^2 - J_3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - J_3 = \frac{1}{2} - J_3,
 \end{aligned}$$

de modo que

$$(3.2) \quad J_+ J_- + J_- J_+ = \{J_+, J_-\} = 1,$$

con $J_+^2 = 0$, $J_-^2 = 0$. Por lo tanto, una realización de este sistema cuántico corresponde a una partícula de spin $\frac{1}{2}$ inmersa en un campo magnético constante B , cuyo Hamiltoniano está dado por

$$(3.3) \quad H = 2\mu B J_3 = 2\mu B \left(J_+ J_- - \frac{1}{2} \right),$$

donde μ es el factor giromagnético de la partícula.

Por analogía con el desarrollo efectuado en la sección anterior para un grado de libertad bosónico, buscamos una realización de este espacio de estados de un grado de libertad fermiónico en términos de *funciones analíticas* de cierta variable $\bar{\eta}$, $f(\bar{\eta})$, sobre las cuales el operador de creación $a^\dagger$ actúe como el operador de multiplicación por $\bar{\eta}$,

$$(3.8) \quad a^\dagger f(\bar{\eta}) = \bar{\eta} f(\bar{\eta}).$$

Pero en este caso $(a^\dagger)^2 = 0$, lo que implica que $\bar{\eta}^2 = 0$. En consecuencia, $\bar{\eta}$ no es una variable compleja sino un *elemento nilpotente*.

Dado que el espacio de estados es complejo, introducimos un elemento *conjugado*⁸ de $\bar{\eta}$, $\eta = (\bar{\eta})^\dagger$, que supondremos independiente de $\bar{\eta}$ y que, naturalmente, también resulta nilpotente, dado que $\eta^2 = (\bar{\eta}^2)^\dagger = 0$.

Requiriendo que combinaciones lineales de η y $\bar{\eta}$ también sean nilpotentes resulta

$$(3.10) \quad (A\eta + B\bar{\eta})^2 = AB(\eta\bar{\eta} + \bar{\eta}\eta) = 0, \quad \forall A, B \in \mathbb{C},$$

de modo que

$$(3.11) \quad \{\eta, \bar{\eta}\} := \eta\bar{\eta} + \bar{\eta}\eta = 0.$$

Se dice que elementos nilpotentes y anticonmutantes como η y $\bar{\eta}$ generan un *álgebra de Grassman*.

Con estas propiedades, las *funciones analíticas* de la variable $\bar{\eta}$ se reducen simplemente a funciones lineales,

$$(3.12) \quad f(\bar{\eta}) = f_0 + f_1 \bar{\eta}, \quad \text{con } f_0, f_1 \in \mathbb{C},$$

las que forman un espacio lineal bidimensional (que es lo adecuado a la situación que queremos describir).

Las funciones *analíticas* más generales de η y $\bar{\eta}$ se reducen a polinomios de grado dos con coeficientes complejos de la forma

$$(3.13) \quad F(\bar{\eta}, \eta) = F_{00} + F_{10}\bar{\eta} + F_{01}\eta + F_{11}\bar{\eta}\eta, \quad F_{ij} \in \mathbb{C},$$

que forman un espacio lineal de dimensión $2^2 = 4$.

⁸Supondremos que esta *conjugación* tiene las siguientes propiedades: dados dos elementos de esa naturaleza, $\bar{\eta}$ y $\bar{\xi}$, y sus conjugados, η y ξ , entonces

$$(3.9) \quad (\bar{\eta}\bar{\xi})^\dagger = \xi\eta, \quad (A\bar{\eta} + B\bar{\xi})^\dagger = A^*\eta + B^*\xi, \quad \forall A, B \in \mathbb{C}.$$

A partir de las propiedades de las variables de Grassman es también posible definir un producto distributivo y asociativo para estas funciones.

Sobre los elementos de este espacio lineal se definen operaciones lineales de *derivación* mediante las reglas

$$(3.14) \quad \bar{\partial} F(\bar{\eta}, \eta) = F_{10} + F_{11} \eta,$$

$$\partial F(\bar{\eta}, \eta) = F_{01} - F_{11} \bar{\eta}.$$

Nótese que, para toda función $F(\bar{\eta}, \eta)$ tenemos que

$$(3.15) \quad \partial \{ \bar{\partial} F(\bar{\eta}, \eta) \} = F_{11} = -\bar{\partial} \{ \partial F(\bar{\eta}, \eta) \},$$

de modo que estas operaciones de derivación anticonmutan entre sí,

$$(3.16) \quad \{ \bar{\partial}, \partial \} = \bar{\partial} \partial + \partial \bar{\partial} = 0.$$

Además, son operadores nilpotentes, dado que

$$(3.17) \quad \bar{\partial}^2 F(\bar{\eta}, \eta) = 0 = \partial^2 F(\bar{\eta}, \eta),$$

cualquiera que sea $F(\bar{\eta}, \eta)$. Entonces, $\bar{\partial}^2 = 0 = \partial^2$.

También tenemos que, para toda $F(\bar{\eta}, \eta)$,

$$(3.18) \quad \bar{\partial} \{ \bar{\eta} F(\bar{\eta}, \eta) \} = \bar{\partial} \{ F_{00} \bar{\eta} + F_{01} \bar{\eta} \eta \} = F_{00} + F_{01} \eta,$$

mientras que

$$(3.19) \quad \bar{\eta} \{ \bar{\partial} F(\bar{\eta}, \eta) \} = \bar{\eta} \{ F_{10} + F_{11} \eta \} = F_{10} \bar{\eta} + F_{11} \bar{\eta} \eta,$$

de modo que

$$(3.20) \quad \{ \bar{\partial}, \bar{\eta} \} = 1.$$

Similarmente,

$$(3.21) \quad \{ \partial, \eta \} = 1, \quad \{ \bar{\partial}, \eta \} = 0, \quad \{ \partial, \bar{\eta} \} = 0.$$

Podemos definir las *funciones analíticas* de $\bar{\eta}$ (o de η) mediante estas operaciones de derivación, imponiendo (por ejemplo) que

$$(3.22) \quad \partial f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = f(\bar{\eta}) = f_0 + f_1 \bar{\eta}.$$

El espacio lineal bidimensional que conforman estos vectores puede constituirse en un espacio euclídeo isomorfo al espacio de estados del grado de libertad fermiónico si se lo estructura con un producto escalar definido como

$$(3.23) \quad (f, g) := f_0^* g_0 + f_1^* g_1 = \langle f | g \rangle,$$

donde $g(\bar{\eta}) = g_0 + g_1 \bar{\eta}$, y los vectores de estado corresponden a las combinaciones lineales

$$(3.24) \quad |f\rangle = f_0 |0\rangle + f_1 |1\rangle, \quad |g\rangle = g_0 |0\rangle + g_1 |1\rangle.$$

3.1. Integración sobre variables de Grassman. Para seguir con la analogía con el espacio de Bargmann - Fock, buscamos representar (formalmente) este producto interior como una *integral* en las variables $\bar{\eta}$ y η . Para definir esta operación, le imponemos que sea *lineal* e *invariante frente a traslaciones en $\bar{\eta}$* .

La primera condición implica que

$$(3.25) \quad \int d\bar{\eta} f(\bar{\eta}) = f_0 \int d\bar{\eta} 1 + f_1 \int d\bar{\eta} \bar{\eta},$$

lo que muestra que es suficiente determinar dos *integrales*, la de 1 y la de $\bar{\eta}$.

La segunda condición significa que, si $\bar{\xi}$ es otro elemento del álgebra de Grassman independiente de $\bar{\eta}$ y η (nilpotente y que anticonmuta con ellos), entonces

$$(3.26) \quad \int d\bar{\eta} (\bar{\eta} + \bar{\xi}) = \int d\bar{\eta} \bar{\eta} + \int d\bar{\eta} 1 \bar{\xi} = \int d\bar{\eta}' \bar{\eta}',$$

donde hemos usado la linealidad de esta operación. Pero esto implica que

$$(3.27) \quad \int d\bar{\eta} 1 = 0.$$

Y como no queremos que la operación en la Ec. (3.25) sea idénticamente nula, debemos tomar

$$(3.28) \quad \int d\bar{\eta} \bar{\eta} \neq 0.$$

Como tenemos la libertad de normalizar esta *integral* de modo que

$$(3.29) \quad \int d\bar{\eta} \bar{\eta} = 1,$$

la operación así definida coincide con la derivación $\bar{\partial}$. En efecto,

$$(3.30) \quad \int d\bar{\eta} f(\bar{\eta}) = f_1 = \bar{\partial} f(\bar{\eta}), \quad \forall f(\bar{\eta}).$$

Similarmente, adoptamos

$$(3.31) \quad \int d\eta 1 = 0, \quad \int d\eta \eta = 1 \quad \Rightarrow \quad \int d\eta f(\eta) = \partial f(\eta),$$

para toda $f(\eta)$.

Además, para una función arbitraria de ambas variables de Grassman tenemos

$$(3.32) \quad \int d\eta \left\{ \int d\bar{\eta} F(\bar{\eta}, \eta) \right\} = \int d\eta \{F_{10} + F_{11} \eta\} = F_{11} = \partial \bar{\partial} F(\bar{\eta}, \eta)$$

y

$$(3.33) \quad \int d\bar{\eta} \left\{ \int d\eta F(\bar{\eta}, \eta) \right\} = \int d\bar{\eta} \{F_{01} - F_{11} \bar{\eta}\} = -F_{11} = \bar{\partial} \partial F(\bar{\eta}, \eta) ,$$

lo que justifica escribir

$$(3.34) \quad \{d\bar{\eta}, d\eta\} = 0 .$$

Por otra parte, es evidente que

$$(3.35) \quad \int d\bar{\eta} \bar{\partial} F(\bar{\eta}, \eta) = 0 = \int d\eta \partial F(\bar{\eta}, \eta) ,$$

de modo que la integral de una derivada es siempre cero.

Finalmente,

$$(3.36) \quad \int d\bar{\eta} \eta F(\bar{\eta}, \eta) = \bar{\partial} \eta F(\bar{\eta}, \eta) = -\eta \bar{\partial} F(\bar{\eta}, \eta) = -\eta \int d\bar{\eta} F(\bar{\eta}, \eta) ,$$

de manera tal que

$$(3.37) \quad \{d\bar{\eta}, \eta\} = 0 = \{d\eta, \bar{\eta}\} .$$

Frente a una transformación lineal de las variables de Grassman,

$$(3.38) \quad \begin{pmatrix} \bar{\eta} \\ \eta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \xi \end{pmatrix} ,$$

donde A es una matriz compleja no singular, una función arbitraria $F(\bar{\eta}, \eta)$ se transforma según

$$(3.39) \quad F(\bar{\eta}, \eta) = F(A_{11} \bar{\xi} + A_{12} \xi, A_{21} \bar{\xi} + A_{22} \xi) =: G(\bar{\xi}, \xi) .$$

En particular, el término cuadrático se transforma en

$$(3.40) \quad \begin{aligned} F_{11} \bar{\eta} \eta &= F_{11} (A_{11} \bar{\xi} + A_{12} \xi) (A_{21} \bar{\xi} + A_{22} \xi) = \\ &= F_{11} (A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}) \bar{\xi} \xi = F_{11} (\det A) \bar{\xi} \xi \Rightarrow \\ &\Rightarrow G_{11} = F_{11} (\det A) . \end{aligned}$$

En consecuencia, como el resultado de la integral no puede depender del cambio de variables, ésta debe estar acompañada de un Jacobiano (que supondremos numérico) que haga que, para toda función $F(\bar{\eta}, \eta)$, sea

$$(3.41) \quad \begin{aligned} \int d\bar{\eta} d\eta F(\bar{\eta}, \eta) &= -F_{11} = \\ &= \int d\bar{\xi} d\xi J(A) G(\bar{\xi}, \xi) = -J(A) G_{11} = -J(A) F_{11} (\det A) . \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(3.42) \quad J(A) = (\det A)^{-1}$$

(que es la inversa del Jacobiano correspondiente a una transformación lineal de variables complejas).

Con esas reglas de integración, podemos ahora representar el producto escalar introducido en la Ec. (3.23) entre las funciones

$$(3.43) \quad f(\bar{\eta}) = f_0 + f_1 \bar{\eta} \quad \text{y} \quad g(\bar{\eta}) = g_0 + g_1 \bar{\eta}$$

como la integral sobre variables de Grassman

$$\begin{aligned} & \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} (f(\bar{\eta}))^\dagger g(\bar{\eta}) = \\ (3.44) \quad & = \int d\bar{\eta} d\eta (1 - \bar{\eta}\eta) (f_0^* + f_1^* \eta) (g_0 + g_1 \bar{\eta}) = \\ & = \int d\bar{\eta} d\eta (f_1^* g_1 \eta \bar{\eta} - f_0^* g_0 \bar{\eta} \eta) = \\ & = f_1^* g_1 + f_0^* g_0 \equiv (f, g) . \end{aligned}$$

Nótese la analogía formal con el producto escalar en el espacio de Bargmann - Fock.

3.2. Operadores en la representación de estados mediante variables de Grassman. Recordemos que el operador de creación $a^\dagger$ corresponde en esta representación del espacio de estados del grado de libertad fermiónico a la multiplicación por el elemento de Grassman $\bar{\eta}$,

$$(3.45) \quad \mathbf{a}^\dagger f(\bar{\eta}) = \bar{\eta} f(\bar{\eta}) .$$

Para hallar su operador adjunto debemos considerar el producto escalar

$$\begin{aligned} & (a^\dagger f, g) = \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} (\mathbf{a}^\dagger f(\bar{\eta}))^\dagger g(\bar{\eta}) = \\ (3.46) \quad & = \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} (\bar{\eta} f_0)^\dagger g_1 \bar{\eta} = - \int d\bar{\eta} d\eta \bar{\eta} \eta f_0^* g_1 = \\ & = \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} f(\bar{\eta})^\dagger \bar{\partial} g(\bar{\eta}) = \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} f(\bar{\eta})^\dagger \mathbf{a} g(\bar{\eta}) , \end{aligned}$$

de donde resulta que

$$(3.47) \quad \mathfrak{a} g(\bar{\eta}) = \bar{\partial} g(\bar{\eta}) .$$

Por lo tanto,

$$(3.48) \quad \mathfrak{a}^\dagger \equiv \bar{\eta} , \quad \mathfrak{a} \equiv \bar{\partial} ,$$

de modo que

$$(3.49) \quad \mathfrak{a}^{\dagger 2} = 0 , \quad \mathfrak{a}^2 = 0 , \quad \{ \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^\dagger \} = \{ \bar{\partial}, \bar{\eta} \} = 1 .$$

En esta representación, el Hamiltoniano del oscilador fermiónico se escribe como

$$(3.50) \quad \mathfrak{H}(\mathfrak{a}^\dagger, \mathfrak{a}) = \hbar\omega \left(\mathfrak{a}^\dagger \mathfrak{a} - \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(\bar{\eta} \bar{\partial} - \frac{1}{2} \right)$$

y sus autovectores, que constituyen un sistema ortogonal y completo en este espacio, son simplemente

$$(3.51) \quad f_{(0)}(\bar{\eta}) = \bar{\eta}^0 = 1 , \quad \mathfrak{H} f_{(0)}(\bar{\eta}) = -\frac{\hbar\omega}{2} ,$$

$$f_{(1)}(\bar{\eta}) = \bar{\eta}^1 = \bar{\eta} , \quad \mathfrak{H} f_{(1)}(\bar{\eta}) = +\frac{\hbar\omega}{2} ,$$

correspondientes a $|0\rangle$ y $|1\rangle$ respectivamente. En efecto,

$$(3.52) \quad \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} (f_{(i)}(\bar{\eta}))^\dagger f_{(j)}(\bar{\eta}) = \delta_{ij} ,$$

para $i, j = 0, 1$.

En el caso general, un operador A tiene la expresión

$$(3.53) \quad A = \sum_{n,m=0}^1 |n\rangle A_{nm} \langle m| ,$$

y su acción sobre un vector de estado arbitrario $|f\rangle = f_0|0\rangle + f_1|1\rangle$ resulta

$$(3.54) \quad A|f\rangle = |0\rangle (A_{00}f_0 + A_{01}f_1) + |1\rangle (A_{10}f_0 + A_{11}f_1) .$$

Obtenemos el mismo efecto en la representación mediante variables de Grassman introduciendo un *operador integral*

$$(3.55) \quad \mathcal{A}f(\bar{\eta}) := \int d\bar{\xi} d\xi e^{-\bar{\xi}\xi} A(\bar{\eta}, \xi) f(\bar{\xi})$$

cuyo núcleo esté dado por

$$(3.56) \quad A(\bar{\eta}, \xi) = \sum_{n,m=0}^1 \bar{\eta}^n A_{nm} \xi^m .$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}f(\bar{\eta}) &= \sum_{n,m=0}^1 \bar{\eta}^n A_{nm} \int d\bar{\xi} d\xi e^{-\bar{\xi}\xi} \xi^m f(\bar{\xi}) = \\
 (3.57) \quad &= \sum_{n,m=0}^1 \bar{\eta}^n A_{nm} \{\delta_{m0}f_0 + \delta_{m1}f_1\} = \\
 &= \bar{\eta}^0 \{A_{00}f_0 + A_{01}f_1\} + \bar{\eta}^1 \{A_{10}f_0 + A_{11}f_1\} .
 \end{aligned}$$

En particular, para el operador identidad tenemos

$$(3.58) \quad I(\bar{\eta}, \xi) = \sum_{n=0}^1 \bar{\eta}^n \xi^n = 1 + \bar{\eta}\xi = e^{\bar{\eta}\xi} ,$$

núcleo reproductor de este espacio:

$$(3.59) \quad f(\bar{\eta}) = \int d\bar{\xi} d\xi e^{-\bar{\xi}\xi} e^{\bar{\eta}\xi} f(\bar{\xi}) .$$

Nótese que esta expresión puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 (3.60) \quad \int d\bar{\xi} d\xi e^{-\bar{\xi}\xi} e^{\bar{\eta}\xi} f(\bar{\xi}) &= \int d\bar{\xi} d\xi (\bar{\eta}\xi - \bar{\xi}\xi) f(\bar{\xi}) = \\
 &= \int d\bar{\xi} (\bar{\xi} - \bar{\eta}) f(\bar{\xi}) ,
 \end{aligned}$$

lo que da una representación para la *delta de Dirac* en el espacio de las funciones de una variable de Grassman,

$$(3.61) \quad \delta(\bar{\xi} - \bar{\eta}) \equiv (\bar{\xi} - \bar{\eta}) .$$

La composición de operadores está realizada en este espacio mediante la composición de sus núcleos,

$$(3.62) \quad (AB)(\bar{\eta}, \xi) = \int d\bar{\sigma} d\sigma e^{-\bar{\sigma}\sigma} A(\bar{\eta}, \sigma) B(\bar{\sigma}, \xi) ,$$

como puede verificarse fácilmente.

Por su parte, la traza del operador está dada por

$$\begin{aligned}
 (3.63) \quad \text{Tr } A &= A_{00} + A_{11} = \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} A(\bar{\eta}, -\eta) = \\
 &= \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} \{A_{00} + A_{10}\bar{\eta} - A_{01}\eta - A_{11}\bar{\eta}\eta\} .
 \end{aligned}$$

Nótese el cambio de signo en el segundo argumento del núcleo.

El proyector sobre el estado fundamental puede escribirse como

$$(3.64) \quad |0\rangle\langle 0| = 1 - a^\dagger a = : e^{-a^\dagger a} :,$$

como puede comprobarse fácilmente.

Podemos llevar al operador A de la Ec. (3.53) al orden normal escribiendo

$$(3.65) \quad \begin{aligned} A &= \sum_{n,m=0}^1 a^{\dagger n} |0\rangle A_{nm} \langle 0| a^m = \\ &= \sum_{n,m=0}^1 A_{nm} : a^{\dagger n} e^{-a^\dagger a} a^m : = \sum_{n,m=0}^1 A_{nm}^N a^{\dagger n} a^m, \end{aligned}$$

lo que define los coeficientes A_{nm}^N del desarrollo en orden normal.

En esas condiciones, el operador A en el espacio de funciones de $\bar{\eta}$ tiene la expresión

$$(3.66) \quad \mathcal{A} = \sum_{n,m=0}^1 A_{nm}^N \bar{\eta}^n \bar{\partial}^m$$

que, aplicada a una función $f(\bar{\eta})$ y empleando la expresión del operador identidad, Ec. (3.59), conduce a

$$(3.67) \quad \mathcal{A}f(\bar{\eta}) = \int d\bar{\xi} d\xi e^{-\bar{\xi}\xi} e^{\bar{\eta}\xi} \sum_{n,m=0}^1 A_{nm}^N \bar{\eta}^n \xi^m f(\bar{\xi}),$$

de donde resulta que el núcleo del operador integral se obtiene de la expresión del operador en orden normal, reemplazando $a^\dagger \rightarrow \bar{\eta}$ y $a \rightarrow \xi$, y multiplicando por el núcleo reproductor,

$$(3.68) \quad A(\bar{\eta}, \xi) = e^{\bar{\eta}\xi} \sum_{n,m=0}^1 A_{nm}^N \bar{\eta}^n \xi^m$$

(expresión enteramente similar a la que obtuvimos en el caso bosónico, Ec. (2.55)).

Vemos entonces que esta representación del espacio de estados de un grado de libertad fermiónico nos permite un desarrollo estrechamente análogo al del caso bosónico.

También puede generalizarse fácilmente al caso de un número finito N de grados de libertad, mediante la introducción de N variables de Grassman y sus conjugadas, $\{\bar{\eta}_i, \eta_i, i = 1, 2, \dots, N\}$, con las propiedades

$$(3.69) \quad \{\bar{\eta}_i, \bar{\eta}_j\} = 0, \quad \{\bar{\eta}_i, \eta_j\} = 0, \quad \{\eta_i, \eta_j\} = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

El conjunto de funciones de estas $2N$ variables de Grassman forman un espacio lineal de dimensión 2^{2N} , sobre el cual pueden definirse operaciones lineales de *derivación* e *integración* con las propiedades de anticonmutación

$$\begin{aligned}
 \{\bar{\partial}_i, \bar{\eta}_j\} &= \delta_{ij}, \quad \{\bar{\partial}_i, \eta_j\} = 0, \quad \{\partial_i, \bar{\eta}_j\} = 0, \quad \{\partial_i, \eta_j\} = \delta_{ij}, \\
 \{\bar{\partial}_i, \bar{\partial}_j\} &= 0, \quad \{\bar{\partial}_i, \partial_j\} = 0, \quad \{\partial_i, \partial_j\} = 0, \\
 (3.70) \quad \int d\bar{\eta}_i &\equiv \bar{\partial}_i, \quad \int d\eta_i \equiv \partial_i, \\
 \{d\bar{\eta}_i, d\bar{\eta}_j\} &= 0, \quad \{d\bar{\eta}_i, d\eta_j\} = 0, \quad \{d\eta_i, d\eta_j\} = 0.
 \end{aligned}$$

Por su parte, el espacio de vectores de estado de los N grados de libertad es isomorfo al subespacio de las funciones *analíticas* de las variables $\{\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_N\}$, de dimensión 2^N , estructurado con un producto escalar dado por

$$(3.71) \quad \int d\bar{\eta}_1 d\eta_1 \dots d\bar{\eta}_N d\eta_N \exp \left\{ - \sum_{i=1}^N \bar{\eta}_i \eta_i \right\} [f(\bar{\eta})]^\dagger g(\bar{\eta}).$$

En las aplicaciones resulta necesario considerar integrales de *gaussianas* sobre variables de Grassman, de la forma

$$(3.72) \quad I = \int \prod_{n=1}^N d\bar{\eta}_n d\eta_n e^{-\eta^\dagger A \eta + \eta^\dagger \xi + \xi^\dagger \eta},$$

donde

$$(3.73) \quad \eta^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 & \bar{\eta}_2 & \dots & \bar{\eta}_N \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_N \end{pmatrix},$$

y similarmente para $\xi^\dagger$ y ξ , y donde A es una matriz compleja no singular arbitraria.

Completando cuadrados y teniendo en cuenta que la medida de integración ha sido construida de manera que resulte invariante frente a traslaciones, obtenemos

$$\begin{aligned}
 I &= e^{\xi^\dagger A^{-1} \xi} \int \prod_{n=1}^N d\bar{\eta}_n d\eta_n e^{-\eta^\dagger A \eta} = \\
 (3.74) \quad &= e^{\xi^\dagger A^{-1} \xi} \int \prod_{n=1}^N d\bar{\eta}_n d\eta_n \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k!} (\eta^\dagger A \eta)^k = \\
 &= e^{\xi^\dagger A^{-1} \xi} \int \prod_{n=1}^N d\bar{\eta}_n d\eta_n \frac{(-1)^N}{N!} (\eta^\dagger A \eta)^N,
 \end{aligned}$$

dado que los términos de mayor orden se anulan por contener más de $2N$ factores anticonmutantes, y a la integral sólo contribuyen los términos con exactamente $2N$ elementos de Grassman (todos distintos).

Cada factor $(\eta^\dagger A \eta)$ en el integrando contribuye a cada término no nulo con un factor $(\eta_i^\dagger A_{ij} \eta_j)$, y cada contribución de la forma de un producto de N de tales factores puede ser obtenida de $N!$ formas distintas, dado que pares de variables de Grassman *conmutan* entre sí, Podemos entonces escribir

$$\begin{aligned}
 I &= e^{\xi^\dagger A^{-1} \xi} \int \prod_{n=1}^N d\bar{\eta}_n d\eta_n (-1)^N \times \\
 &\times \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N=1}^N \left(\eta_1^\dagger A_{1i_1} \eta_{i_1} \right) \left(\eta_2^\dagger A_{2i_2} \eta_{i_2} \right) \dots \left(\eta_N^\dagger A_{Ni_N} \eta_{i_N} \right) = \\
 (3.75) \quad &= e^{\xi^\dagger A^{-1} \xi} \int \prod_{n=1}^N d\bar{\eta}_n d\eta_n \bar{\eta}_1 \eta_1 \bar{\eta}_2 \eta_2 \dots \bar{\eta}_N \eta_N (-1)^N \times \\
 &\times \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N=1}^N \text{sign} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_N \\ 1 & 2 & \dots & N \end{pmatrix} A_{1i_1} A_{2i_2} \dots A_{Ni_N} = \\
 &= (\det A) e^{\xi^\dagger A^{-1} \xi}.
 \end{aligned}$$

Nótese que la integración sobre variables de Grassman no presenta los problemas de convergencia que hemos encontrado en el caso de variables reales o complejas (no ha sido necesario requerir la positividad de la parte hermítica de la matriz A).

3.3. Integrales funcionales para sistemas fermiónicos. Dada la estrecha analogía de esta formulación con la correspondiente al caso bosónico, podemos operar de manera similar.

Consideremos el Hamiltoniano de un grado de libertad fermiónico expresado en orden normal,

$$(3.76) \quad H(a^\dagger, a; t) = : H(a^\dagger, a; t) :,$$

expresión a lo sumo cuadrática en los operadores de creación y destrucción (que también puede tener una dependencia *suave* en el tiempo). Dadas las propiedades de anticonmutación de estos operadores, supondremos que el acoplamiento en los términos lineales de H se da con objetos que *anticonmutan* con $a^\dagger$ y a (y también con los elementos del álgebra de Grassman).

Entonces, el operador de evolución de la representación de Schrödinger para un intervalo de tiempo infinitesimal $(t + \Delta t, t)$ está dado por

$$(3.77) \quad U = e^{-\frac{i}{\hbar} H(a^\dagger, a; t) \Delta t} = 1 - \frac{i}{\hbar} H(a^\dagger, a; t) \Delta t + O(\Delta t^2),$$

de modo que el núcleo del correspondiente operador integral, a menos de correcciones del orden Δt^2 , es

$$(3.78) \quad U(\bar{\eta}, t + \Delta t; \xi, t) = e^{\bar{\eta} \xi - \frac{i}{\hbar} H(\bar{\eta}, \xi; t) \Delta t} (1 + O(\Delta t^2)).$$

De la Ec. (3.62) para el núcleo de la composición de dos operadores obtenemos para el cuadrado de U

$$(3.79) \quad \begin{aligned} & U(\bar{\eta}, t + 2\Delta t; \xi, t) = \\ &= \int d\bar{\eta}_1 d\eta_1 e^{-\bar{\eta}_1 \eta_1} U(\bar{\eta}, t + 2\Delta t; \eta_1, t + \Delta t) U(\bar{\eta}_1, t + \Delta t; \xi, t) = \\ &= \int d\bar{\eta}_1 d\eta_1 e^{-\bar{\eta}_1 \eta_1} e^{\bar{\eta} \eta_1 - \frac{i}{\hbar} H(\bar{\eta}, \eta_1; t + \Delta t) \Delta t} e^{\bar{\eta}_1 \xi - \frac{i}{\hbar} H(\bar{\eta}_1, \xi; t) \Delta t} \times \\ &\times (1 + O(\Delta t^2))^2 = \int d\bar{\eta}_1 d\eta_1 e^{\frac{1}{2}(\bar{\eta} \eta_1 + \bar{\eta}_1 \xi)} e^{\frac{1}{2}\{(\bar{\eta} - \bar{\eta}_1) \eta_1 - \bar{\eta}_1 (\eta_1 - \xi)\}} \times \\ &\times e^{-\frac{i}{\hbar} \{H(\bar{z}, \eta; t + \Delta t) + H(\bar{\eta}, w; t)\} \Delta t} (1 + O(\Delta t^2))^2, \end{aligned}$$

donde estamos suponiendo que los distintos términos de H son *pares* en el número de objetos anticonmutantes.

Para un intervalo de tiempo finito, (t_i, t_f) , tomando $\Delta t = \frac{t_f - t_i}{N}$ con $N \gg 1$, podemos escribir para el núcleo del operador integral correspondiente al operador de evolución de la descripción de Schödinger

$$\begin{aligned}
 (3.80) \quad U(\bar{\eta}_f, t_f; \eta_i, t_i) &= \int \left(\prod_{n=1}^{N-1} d\bar{z}_n dz_n \right) e^{\frac{1}{2}(\bar{\eta}_f \eta_{N-1} + \bar{\eta}_1 \eta_i)} \times \\
 &\times e^{i \Delta t \sum_{n=1}^{N-1} \left[\left(\frac{\bar{\eta}_{n+1} - \bar{\eta}_n}{2i \Delta t} \right) \eta_n - \bar{\eta}_n \left(\frac{\eta_n - \eta_{n-1}}{2i \Delta t} \right) \right]} \times \\
 &\times e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} H(\bar{\eta}_{n+1}, \eta_n; t_n)} (1 + O(N^{-1})),
 \end{aligned}$$

donde hemos llamado $t_n := t_i + n \Delta t$, $\eta_0 := \eta_i$ y $\bar{\eta}_N := \bar{\eta}_f$.

Si bien, como hemos señalado, las integrales sobre variables de Grassman no presentan los problemas de convergencia que en el caso bosónico nos llevaron a introducir una parte imaginaria negativa en la variable temporal, nada nos impide hacerlo aquí también, puesto que los resultados que se obtienen son analíticos en $T = (t_f - t_i)$.

El límite para $N \rightarrow \infty$ del miembro de la derecha será denotado por

$$\begin{aligned}
 (3.81) \quad U(\bar{\eta}_f, t_f; \eta_i, t_i) &= \int_{\eta(t_i)=\eta_i}^{\bar{\eta}(t_f)=\bar{\eta}_f} \mathcal{D}[\bar{\eta}(t), \eta(t)] e^{\frac{1}{2}[\bar{\eta}_f \eta(t_f) + \bar{\eta}(t_i) \eta_i]} \times \\
 &\times e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{\hbar}{2i} [\dot{\bar{\eta}}(t) \eta(t) - \bar{\eta}(t) \dot{\eta}(t)] - H(\bar{\eta}(t), \eta(t); t) \right\}} \simeq \\
 &\simeq \left(\mathbf{T} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt H(a^\dagger, a; t) \right\} \right) (\bar{\eta}_f, \eta_i),
 \end{aligned}$$

lo que se interpreta como una suma de contribuciones provenientes de trayectorias continuas a valores en un álgebra de Grassman⁹, $(\eta(t), \bar{\eta}(t))$, que satisfacen las condiciones (inicial y final respectivamente) $\eta(t_i) = \eta_i$ y $\bar{\eta}(t_f) = \bar{\eta}_f$.

Nótese que $\bar{\eta}(t)$ *no es* la conjugada de $\eta(t)$, $\bar{\eta}(t) \neq (\eta(t))^\dagger$, de manera que $\bar{\eta}(t_i)$ es el valor (*no condicionado*) que adopta de la trayectoria $\bar{\eta}(t)$ en $t = t_i$. Similarmente, $\eta(t_f)$ es el valor que la trayectoria $\eta(t)$ toma en $t = t_f$. En consecuencia, el primer factor exponencial en el integrando del segundo miembro depende de la trayectoria y no puede ser extraído fuera de la integral funcional.

3.4. La función de partición. Para calcular la función de partición de un grado de libertad fermiónico descrito por un Hamiltoniano independiente del tiempo, tomamos $(t_f - t_i) \rightarrow -i\beta$ en la anterior representación del núcleo del operador de evolución como integral funcional y empleamos la expresión hallada en la Ec. (3.63) para la traza de un operador,

$$\begin{aligned}
 (3.83) \quad Z(\beta) &= \text{Tr} \left\{ e^{-\frac{\beta}{\hbar} H} \right\} = \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} U(\bar{\eta}, -i\beta; -\eta, 0) = \\
 &= \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} \int_{\xi(0)=-\eta}^{\bar{\xi}(\beta)=\bar{\eta}} \mathcal{D} [\bar{\xi}(\tau), \xi(\tau)] e^{\frac{1}{2} [\bar{\eta}\xi(\beta) - \bar{\xi}(0)\eta]} \times \\
 &\times e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^\beta d\tau \left\{ \frac{\hbar}{2} [\bar{\xi}(\tau) \dot{\xi}(\tau) - \dot{\bar{\xi}}(\tau) \xi(\tau)] + H(\bar{\xi}(\tau), \xi(\tau)) \right\}} = \\
 &= \int d\bar{\eta} d\eta \int_{\xi(0)=-\eta}^{\bar{\xi}(\beta)=\bar{\eta}} \mathcal{D} [\bar{\xi}(\tau), \xi(\tau)] e^{\bar{\eta}[\xi(\beta) - \eta]} \times \\
 &\times e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^\beta d\tau \left\{ \hbar \bar{\xi}(\tau) \dot{\xi}(\tau) + H(\bar{\xi}(\tau), \xi(\tau)) \right\}},
 \end{aligned}$$

donde hemos integrado por partes el término $\dot{\bar{\xi}}(\tau)\xi(\tau)$ en el argumento de la exponencial.

La integral funcional resultante puede ser interpretada como una suma de contribuciones provenientes de un conjunto de trayectorias en el plano complejo,

⁹Por ejemplo, si el álgebra de Grassman está generada por los elementos nilpotentes y anti-conmutantes $\{\bar{\sigma}_k, \sigma_k; k = 1, 2, \dots\}$, podemos construir *trayectorias continuas* tomando

$$(3.82) \quad \bar{\eta}(t) = \sum_k \bar{h}_k(t) \bar{\sigma}_k, \quad \eta(t) = \sum_k h_k(t) \sigma_k,$$

donde las funciones a valores complejos $\{\bar{h}_k(t), h_k(t); k = 1, 2, \dots\}$ son continuas.

$(\bar{\xi}(\tau), \xi(\tau))$, donde la condición final para la primera es (-1) por la conjugada de la condición inicial para la segunda (valores sobre los cuales también ha de integrarse finalmente).

También en este caso es posible expresar formalmente la función de partición como una suma sobre trayectorias no condicionadas si se introducen *deltas de Dirac* (ver Ec. (3.61)) que impongan las condiciones que pesan sobre las trayectorias y se integra sobre los valores que ellas toman en los extremos del intervalo de tiempo euclídeo,

$$\begin{aligned}
 Z(\beta) &= \int d\bar{\eta} d\eta \int \mathcal{D} [\bar{\xi}(\tau), \xi(\tau)] (\xi(0) + \eta) (\bar{\xi}(\beta) - \bar{\eta}) \times \\
 &\times e^{\bar{\eta}[\xi(\beta) - \eta]} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^\beta d\tau \left\{ \hbar \bar{\xi}(\tau) \dot{\xi}(\tau) + H(\bar{\xi}(\tau), \xi(\tau)) \right\}} = \\
 (3.84) \quad &= - \int \mathcal{D} [\bar{\xi}(\tau), \xi(\tau)] e^{\bar{\xi}(\beta) [\xi(\beta) + \xi(0)]} \times \\
 &\times e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^\beta d\tau \left\{ \hbar \bar{\xi}(\tau) \dot{\xi}(\tau) + H(\bar{\xi}(\tau), \xi(\tau)) \right\}}.
 \end{aligned}$$

Ahora bien, a la integral sobre los valores de $\bar{\xi}(\beta)$ sólo contribuye el segundo término del desarrollo del primer factor exponencial en el integrando,

$$(3.85) \quad e^{\bar{\xi}(\beta) [\xi(\beta) + \xi(0)]} = 1 + \bar{\xi}(\beta) [\xi(\beta) + \xi(0)],$$

de modo que

$$(3.86) \quad - \int d\bar{\xi}(\beta) d\xi(\beta) e^{\bar{\xi}(\beta) [\xi(\beta) + \xi(0)]} = \int d\xi(\beta) [\xi(\beta) + \xi(0)],$$

lo que corresponde a imponer sobre las trayectorias $\xi(\tau)$ que sus valores en los extremos satisfagan

$$(3.87) \quad \xi(\beta) = -\xi(0).$$

Integrando por partes el término $\bar{\xi}(\tau) \dot{\xi}(\tau)$ en la segunda exponencial del integrando de la Ec. (3.84) se llega a la misma conclusión para la trayectoria $\bar{\xi}(\tau)$, es decir, $\bar{\xi}(\beta) = -\bar{\xi}(0)$.

Por lo tanto, la función de partición de un grado de libertad fermiónico admite ser representada formalmente como una integral funcional sobre trayectorias a valores en un álgebra de Grassman, cuyos valores en los extremos del intervalo de tiempo euclídeo $[0, \beta]$ son opuestos por su signo.

Esta interpretación se ve reforzada al considerar un Hamiltoniano cuadrático, $H(\bar{\xi}, \xi) = \hbar\omega \bar{\xi}\xi$, para el cual tenemos simplemente

$$(3.88) \quad Z_0(\beta) = \int \mathcal{D} [\bar{\xi}(\tau), \xi(\tau)] e^{-\int_0^\beta d\tau \bar{\xi}(\tau) [\partial_\tau + \omega] \xi(\tau)}.$$

Por lo que hemos visto anteriormente, esperamos que el valor de esta integral funcional sea proporcional al determinante funcional (regularizado) del operador diferencial de primer orden $D = [\partial_\tau + \omega]$ definido sobre un dominio de funciones que satisfacen la condición de contorno $\xi(\beta) = -\xi(0)$.

El adjunto de ese operador resulta ser el operador $D^\dagger = [-\partial_\tau + \omega]$ con dominio de definición en el conjunto de funciones que también satisfacen la propiedad $\bar{\xi}(\beta) = -\bar{\xi}(0)$.

Dado que la función de partición toma valores no negativos, podemos *definir* el resultado de la integral funcional de la Ec. (3.88) como proporcional a la potencia $(\frac{1}{2})$ del determinante funcional de la composición $L_\omega = D^\dagger D = -\partial_\tau^2 + \omega^2$, composición que sólo es posible en el dominio restringido (pero denso) de las funciones *antiperiódicas* (es decir, las que satisfacen además que $\xi'(\beta) = -\xi'(0)$). Tendríamos entonces que

$$(3.89) \quad Z_0(\beta) \sim \left\{ \text{Det} [-\partial_\tau^2 + \omega^2] \Big|_{\text{c.c. antiper.}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Consideremos el problema de autovalores de ese operador de Sturm - Liouville,

$$(3.90) \quad \begin{aligned} L_\omega \psi_\lambda(\tau) &= [-\partial_\tau^2 + \omega^2] \psi_\lambda(\tau) = \lambda \psi_\lambda(\tau), \\ \psi_\lambda(\beta) &= -\psi_\lambda(0), \quad \psi'_\lambda(\beta) = -\psi'_\lambda(0), \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$(3.91) \quad \begin{aligned} \psi_\lambda(\tau) &= e^{\pm i\tau\sqrt{\lambda - \omega^2}}, \quad \text{con } e^{\pm i\beta\sqrt{\lambda - \omega^2}} = -1 \\ \Rightarrow \beta\sqrt{\lambda - \omega^2} &= (2n + 1)\pi \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{2\pi(n + \frac{1}{2})}{\beta} \right)^2 + \omega^2, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Un análisis similar al realizado en la Sección 1.4 conduce a que

$$(3.92) \quad \text{Det} (L_\omega L_{\omega_0}^{-1}) := \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left[\frac{1 + \left(\frac{\beta\omega}{2\pi(n + \frac{1}{2})} \right)^2}{1 + \left(\frac{\beta\omega}{2\pi(n + \frac{1}{2})} \right)^2} \right]^2 = \left(\frac{\cosh \left(\frac{\beta\omega}{2} \right)}{\cosh \left(\frac{\beta\omega_0}{2} \right)} \right)^2.$$

Teniendo en cuenta que este es un sistema de sólo dos estados, vemos que

$$(3.93) \quad Z_0(\beta) = e^{-\frac{\beta\omega}{2}} + e^{\frac{\beta\omega}{2}} = 2 \cosh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right)$$

de donde resulta que

$$(3.94) \quad \frac{Z_0(\beta, \omega)}{Z_0(\beta, \omega_0)} = \left\{ \text{Det} (L_\omega L_{\omega_0}^{-1}) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

3.5. Ejemplo: el oscilador fermiónico forzado. Consideremos el Hamiltoniano dependiente del tiempo

$$(3.95) \quad H(a^\dagger, a; t) = \hbar \left\{ \omega a^\dagger a - f(t) a^\dagger - \bar{f}(t) a \right\},$$

donde $f(t)$ y $\bar{f}(t)$ son funciones suaves a valores en un álgebra de Grassman.

Reemplazado en la Ec. (3.81) obtenemos

$$(3.96) \quad U(\bar{\eta}_f, t_f; \eta_i, t_i) = \int_{\eta(t_i)=\eta_i}^{\bar{\eta}(t_f)=\bar{\eta}_f} \mathcal{D}[\bar{\eta}(t), \eta(t)] e^{\frac{1}{2} [\bar{\eta}_f \eta(t_f) + \bar{\eta}(t_i) \eta_i]} \times \\ \times e^{\imath \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{1}{2\imath} [\dot{\bar{\eta}}(t) \eta(t) - \bar{\eta}(t) \dot{\eta}(t)] - \omega \bar{\eta}(t) \eta(t) + \bar{\eta}(t) f(t) + \bar{f}(t) \eta(t) \right\}}.$$

Las trayectorias $(\bar{z}(t), z(t))$ que hacen que el argumento de la exponencial en el integrando tome un valor extremo y que satisfacen las condiciones inicial y final especificadas en los límites de la integral funcional son soluciones de las ecuaciones

$$(3.97) \quad \frac{1}{\hbar} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(t)} \int_{t_i}^{t_f} dt' \left\{ \frac{\hbar}{2\imath} [\dot{\bar{\eta}}(t') \eta(t') - \bar{\eta}(t') \dot{\eta}(t')] - H(\bar{\eta}(t'), \eta(t'); t') \right\} = \\ = \imath \dot{\eta}(t) - \omega \eta(t) + f(t) = 0, \quad \eta(t_i) = \eta_i,$$

y

$$(3.98) \quad \frac{1}{\hbar} \frac{\delta}{\delta \eta(t)} \int_{t_i}^{t_f} dt' \left\{ \frac{\hbar}{2\imath} [\dot{\bar{\eta}}(t') \eta(t') - \bar{\eta}(t') \dot{\eta}(t')] - H(\bar{\eta}(t'), \eta(t'); t') \right\} = \\ = \imath \dot{\bar{\eta}}(t) + \omega \bar{\eta}(t) - \bar{f}(t) = 0, \quad \bar{\eta}(t_f) = \bar{\eta}_f,$$

cuyas soluciones son

$$(3.99) \quad \eta(t) = e^{-\imath\omega(t-t_i)} \eta_i + \imath \int_{t_i}^t dt' e^{-\imath\omega(t-t')} f(t'), \\ \bar{\eta}(t) = \bar{\eta}_f e^{-\imath\omega(t_f-t)} + \imath \int_t^{t_f} dt' \bar{f}(t') e^{-\imath\omega(t'-t)}.$$

Reemplazando estas soluciones en el argumento de la exponencial obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{\hbar}{2i} [\dot{\bar{\eta}}(t)\eta(t) - \bar{\eta}(t)\dot{\eta}(t)] - H(\bar{\eta}(t), \eta(t); t) \right\} = \\
& = \frac{i}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \bar{\eta}(t) f(t) + \bar{f}(t) \eta(t) \right\} = \\
(3.100) \quad & = \frac{i}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \bar{\eta}_f e^{-i\omega(t_f - t)} + i \int_t^{t_f} dt' \bar{f}(t') e^{-i\omega(t' - t)} \right\} f(t) + \\
& + \frac{i}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \bar{f}(t) \left\{ e^{-i\omega(t - t_i)} \eta_i + i \int_{t_i}^t dt' e^{-i\omega(t - t')} f(t') \right\} = \\
& = \frac{i}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \bar{\eta}_f e^{-i\omega(t_f - t)} f(t) + \bar{f}(t) e^{-i\omega(t - t_i)} \eta_i \right\} - \\
& - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt' \bar{f}(t) \left\{ \theta(t - t') e^{-i\omega(t - t')} + \right. \\
& \left. + \theta(t' - t) e^{-i\omega(t' - t)} \right\} f(t').
\end{aligned}$$

El exponente del primer factor en el integrando del miembro de la derecha de la Ec. (3.96) (que sólo depende de los valores de las trayectorias en los extremos del intervalo de tiempo) evaluado en las soluciones de la Ec. (3.99) se reduce a

$$\begin{aligned}
(3.101) \quad & \frac{1}{2} [\bar{\eta}_f \eta(t_f) + \bar{\eta}(t_i) \eta_i] = \bar{\eta}_f e^{-i\omega(t_f - t_i)} \eta_i + \\
& + \frac{i}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \bar{\eta}_f e^{-i\omega(t_f - t)} f(t) + \bar{f}(t) e^{-i\omega(t - t_i)} \eta_i \right\}.
\end{aligned}$$

La suma de los miembros de la derecha de las Ecs. (3.100) y (3.101) da $\frac{i}{\hbar}$ veces la acción del grado de libertad fermiónico evaluada en las *trayectorias clásicas*, $S(\bar{\eta}_f, t_f; \eta_i, t_i)$.

Al igual que en el caso bosónico, cambiando t por $t(1 - i\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$, los factores $e^{-i\omega(t_f - t_i)}$, $e^{-i\omega(t_f - t)}$ y $e^{-i\omega(t - t_i)}$ tienden exponencialmente a cero cuando $t_f \rightarrow \infty$ y $t_i \rightarrow -\infty$, de modo que el segundo miembro de la Ec. (3.101) tiende a 0, mientras que del miembro de la derecha de la Ec. (3.100) sólo sobrevive el término

$$(3.102) \quad i\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \bar{f}(t) G_F(t - t') f(t'),$$

donde $G_F(t - t')$ es la función de Green de Feynman, Ec. (1.124).

Teniendo en cuenta que la medida de integración de la integral funcional de la Ec. (3.96) ha sido definida de manera que resulte invariante frente a traslaciones, podemos hacer el cambio en las variables de integración $\bar{\eta}(t) \rightarrow \bar{\eta}(t) + \bar{\xi}(t)$ y $\eta(t) \rightarrow \eta(t) + \xi(t)$, con $\xi(t_i) = 0$ y $\bar{\xi}(t_f) = 0$.

Empleando las ecuaciones que determinan los extremos de la acción, Ecs. (3.97) y (3.98), obtenemos para el núcleo del operador de evolución

$$(3.103) \quad U(\bar{\eta}_f, t_f; \eta_i, t_i) = e^{\frac{i}{\hbar} S(\bar{\eta}_f, t_f; \eta_i, t_i)} \times \\ \times \int_{\xi(t_i)=0}^{\bar{\xi}(t_f)=0} \mathcal{D}[\bar{\xi}(t), \xi(t)] e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt \bar{\xi}(t) (i\partial_\tau - \omega) \xi(t)},$$

donde toda la dependencia en $\bar{\eta}_f$ y η_i está contenida en el primer factor. La integral funcional remanente, que corresponde a un factor constante $\mathcal{N}(t_f - t_i)$, puede ser interpretada como proporcional al determinante funcional (regularizado) del operador diferencial de primer orden $(i\partial_\tau - \omega)$ con dominio de definición en las funciones que satisfacen la condición de Dirichlet en $t = t_i$, $w(t_i) = 0$.

Aquí también podemos determinar la constante $\mathcal{N}(t_f - t_i)$ considerando el caso en que $f(t) \equiv 0$ y $\bar{f}(t) \equiv 0$, para el cual la acción evaluada en sus extremos se reduce a (ver Ecs. (3.100) y (3.101))

$$(3.104) \quad \frac{i}{\hbar} S(\bar{z}_f, t_f; z_i, t_i) = \bar{\eta}_f e^{-i\omega(t_f - t_i)} \eta_i.$$

Tomando $t_f - t_i \rightarrow -i\beta$, tenemos que la función de partición del oscilador fermiónico libre (descrito por el Hamiltoniano $\hbar\omega a^\dagger a$, con la energía del vacío sustraída) es

$$(3.105) \quad Z_0(\beta) = \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} U(\bar{\eta}, -i\beta; -\eta, 0) = \\ = \mathcal{N}(-i\beta) \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} e^{-\bar{\eta}} e^{-\beta\omega} \eta = \\ = \mathcal{N}(-i\beta) \int d\bar{\eta} d\eta \eta \bar{\eta} (1 + e^{-\beta\omega}) = \mathcal{N}(-i\beta) (1 + e^{-\beta\omega}),$$

de donde resulta que $\mathcal{N}(-i\beta) = 1 \Rightarrow \mathcal{N}(T) = 1$.

Por lo tanto,

$$(3.106) \quad U(\bar{\eta}_f, t_f; \eta_i, t_i) = e^{\frac{i}{\hbar} S(\bar{\eta}_f, t_f; \eta_i, t_i)}$$

que, con $t_i = -\frac{T}{2}$ y $t_f = \frac{T}{2}$, se comporta para $T \rightarrow \infty$ como

$$(3.107) \quad U(\bar{\eta}_f, \infty; \eta_i, -\infty) = e^{i\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \bar{f}(t) G_F(t-t') f(t')} .$$

Tomando la traza del operador de evolución obtenemos

$$(3.108) \quad \begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} U(\bar{\eta}, T/2; -\eta, -T/2) &= \\ &= e^{i\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \bar{f}(t) G_F(t-t') f(t')} = \\ &= \mathcal{Z}_0 [\bar{f}(t), f(t)] , \end{aligned}$$

donde $\mathcal{Z}_0 [\bar{f}(t), f(t)]$ es la *funcional generatriz* del sistema fermiónico.

Las derivadas funcionales del segundo miembro respecto de las fuentes externas permiten calcular valores medios de vacío de productos de operadores de creación y destrucción ordenados cronológicamente.

4. INTEGRALES FUNCIONALES EN TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS

La acción clásica de un campo escalar real $\varphi(x)$, de masa m y sin autointeracción, acoplado a una fuente externa (escalar) de soporte compacto $j(x)$ está dada por

$$(4.1) \quad I_0[\varphi, j] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial\varphi(x))^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi(x)^2 + j(x) \varphi(x) \right\} ,$$

de la que se deduce el operador Hamiltoniano es

$$(4.2) \quad \begin{aligned} H(t) &= H_0 - \int d^3x j(x) \varphi_S(\vec{x}) , \\ H_0 &= \int d^3x : \left\{ \frac{1}{2} \pi_S(\vec{x})^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_S(\vec{x}))^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi_S(\vec{x})^2 \right\} : , \end{aligned}$$

donde el orden normal está tomado respecto de los operadores de creación y destrucción del campo¹⁰, $a_{\vec{k}}^\dagger$ y $a_{\vec{k}}$ respectivamente, que satisfacen las reglas de conmutación (para simplificar la notación adoptamos las *unidades naturales*, en las que $\hbar = 1$ y $c = 1$ - ver nota al pie Nro. 3)

$$(4.3) \quad [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = 2\omega_{\vec{k}} \delta(\vec{k} - \vec{k}') ,$$

con $\omega_{\vec{k}} := \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$, y en términos de los cuales los operadores correspondientes a los *campos conjugados* (en la descripción de Schödinger) tienen el desarrollo

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \varphi_S(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \left(\frac{d^3k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \left\{ a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} , \\ \pi_S(\vec{x}) &= \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \left(\frac{d^3k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \omega_{\vec{k}} \left\{ a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} , \end{aligned}$$

donde se integra sobre el espacio de impulsos lineales respecto de una *medida invariante frente a transformaciones de Lorentz*¹¹.

En efecto, resulta un ejercicio directo verificar que las reglas de conmutación de la Ec. (4.3) implican las *relaciones canónicas de conmutación* entre los campos conjugados,

$$(4.6) \quad [\pi_S(\vec{x}), \varphi_S(\vec{y})] = -i \delta(\vec{x} - \vec{y}) ,$$

$$[\pi_S(\vec{x}), \pi_S(\vec{y})] = 0 = [\varphi_S(\vec{x}), \varphi_S(\vec{y})] .$$

En términos de operadores de creación y destrucción, el operador Hamiltoniano del campo libre se reduce a

$$(4.7) \quad H_0 = \int \left(\frac{d^3k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} ,$$

¹⁰El espacio de Fock del campo escalar se construye a partir del *estado de vacío* $|\Omega_0\rangle$, caracterizado por la condición $a_{\vec{k}}|\Omega_0\rangle = 0$, $\forall \vec{k} \in \mathbb{R}^3$, mediante la aplicación de operadores de creación, $|\Omega_N\rangle = a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger \dots a_{\vec{k}_N}^\dagger |\Omega_0\rangle$.

¹¹En efecto,

$$(4.5) \quad \int \left(\frac{d^3k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) (\cdot) = \int d^4k \theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) (\cdot) .$$

mientras que para el término de acoplamiento con la fuente externa tenemos

$$\begin{aligned}
 & - \int d^3x j(x) \varphi_S(\vec{x}) = \\
 (4.8) \quad & = - \int \left(\frac{d^3k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \left\{ \frac{a_{\vec{k}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3x j(x) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{a_{\vec{k}}^\dagger}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3x j(x) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} = \\
 & = - \int \left(\frac{d^3k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \left\{ f^*(\vec{k}, t) a_{\vec{k}} + f(\vec{k}, t) a_{\vec{k}}^\dagger \right\} ,
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 f^*(\vec{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3x j(\vec{x}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} , \\
 (4.9) \quad f(\vec{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3x j(\vec{x}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} .
 \end{aligned}$$

En definitiva,

$$(4.10) \quad H [a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}}; t] = \int \left(\frac{d^3k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \left\{ \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} - f^*(\vec{k}, t) a_{\vec{k}} - f(\vec{k}, t) a_{\vec{k}}^\dagger \right\} .$$

Este Hamiltoniano resulta *diagonal* en los modos normales del campo, de modo que una generalización directa de la representación como integral funcional del núcleo del operador de evolución de la descripción de Schödinger para un solo grado de libertad, Ec. (2.63), nos permite representar

$$\begin{aligned}
 U [\bar{z}_f(\vec{k}), t_f; z_i(\vec{k}), t_i] &= \int_{z(\vec{k}, t_i)=z_i(\vec{k})}^{\bar{z}(\vec{k}, t_f)=\bar{z}_f(\vec{k})} \mathcal{D} [\bar{z}(\vec{k}, t), z(\vec{k}, t)] \times \\
 & \times e^{\frac{1}{2} \int \left(\frac{d^3k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) [\bar{z}_f(\vec{k}) z(\vec{k}, t_f) + \bar{z}(\vec{k}, t_i) z_i(\vec{k})]} \times \\
 (4.11) \quad & \times \exp \left\{ i \int \left(\frac{d^3k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{1}{2i} [\dot{\bar{z}}(\vec{k}, t) z(\vec{k}, t) - \bar{z}(\vec{k}, t) \dot{z}(\vec{k}, t)] - \right. \right. \\
 & \left. \left. - H [\bar{z}(\vec{k}, t), z(\vec{k}, t); t] \right) \right\} \simeq \\
 & \simeq \left(\mathbf{T} \exp \left\{ -i \int_{t_i}^{t_f} dt H [a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}}; t] \right\} \right) [\bar{z}_f(\vec{k}), z_i(\vec{k})] .
 \end{aligned}$$

Por su parte, una generalización directa del resultado encontrado para un grado de libertad en las Ecs. (2.91) y (2.85 - 2.86) conduce a que

$$\begin{aligned}
 U \left[\bar{z}_f(\vec{k}), t_f; z_i(\vec{k}), t_i \right] &= \exp \left\{ \int \left(\frac{d^3 k}{2 \omega_{\vec{k}}} \right) \left[\bar{z}_f(\vec{k}) e^{-i \omega_{\vec{k}}(t_f - t_i)} z_i(\vec{k}) + \right. \right. \\
 &+ i \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \bar{z}_f(\vec{k}) e^{-i \omega_{\vec{k}}(t_f - t)} f(\vec{k}, t) + f^*(\vec{k}, t) e^{-i \omega_{\vec{k}}(t - t_i)} z_i(\vec{k}) \right\} - \\
 &- \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt' f^*(\vec{k}, t) \left\{ \theta(t - t') e^{-i \omega_{\vec{k}}(t - t')} + \right. \\
 &\left. \left. + \theta(t' - t) e^{-i \omega_{\vec{k}}(t' - t)} \right\} f(\vec{k}, t') \right] \left. \right\} .
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

4.1. Operador de dispersión. Como estamos suponiendo que $j(\vec{x}, t)$ es de soporte compacto, existe un T finito tal que para $|t| > T$ la fuente es nula y el Hamiltoniano de la Ec. (4.2) se reduce al del campo libre, H_0 . En esas condiciones, el operador de evolución de la descripción de interacción está dado por

$$U_I(t_f, t_i) = e^{i H_0 t_f} U(t_f, t_i) e^{-i H_0 t_i} ,
 \tag{4.13}$$

y el *operador de dispersión* (o *matriz S*) se define como

$$S_0[j] := \lim_{t_f \rightarrow \infty} \lim_{t_i \rightarrow -\infty} U_I(t_f, t_i) .
 \tag{4.14}$$

Ahora bien, en la *representación holomorfa* de la integral funcional para la teoría del campo escalar, los operadores de creación están representados mediante el producto por la función a valores complejos $\bar{z}(\vec{k})$, de modo que las relaciones de conmutación de la Ec. (4.3) requieren que

$$a_{\vec{k}}^\dagger \rightarrow \bar{z}(\vec{k}) , \quad a_{\vec{k}} \rightarrow 2 \omega_{\vec{k}} \frac{\delta}{\delta \bar{z}(\vec{k})} .
 \tag{4.15}$$

En efecto,

$$\left[2 \omega_{\vec{k}} \frac{\delta}{\delta \bar{z}(\vec{k})} , \bar{z}(\vec{k}') \right] = 2 \omega_{\vec{k}} \delta(\vec{k} - \vec{k}') .
 \tag{4.16}$$

Entonces, de la Ec. (4.7) vemos que el Hamiltoniano H_0 está realizado en el espacio de Bargmann - Fock para el campo escalar por el operador

$$\mathcal{H}_0 = \int \left(\frac{d^3 k}{2 \omega_{\vec{k}}} \right) \omega_{\vec{k}} \bar{z}(\vec{k}) 2 \omega_{\vec{k}} \frac{\delta}{\delta \bar{z}(\vec{k})} = \int d^3 k \omega_{\vec{k}} \frac{\delta}{\delta \log \bar{z}(\vec{k})} ,
 \tag{4.17}$$

generador de las traslaciones en la variable $\log \bar{z}(\vec{k})$ en la cantidad $\omega_{\vec{k}}$. En esas condiciones, actuando con el operador $e^{iH_0 t}$ sobre una funcional de $\bar{z}(\vec{k})$ se obtiene

$$(4.18) \quad e^{i\mathcal{H}_0 t} F \left[\bar{z}(\vec{k}) \right] = F \left[e^{i\omega_{\vec{k}} t} \bar{z}(\vec{k}) \right] .$$

En consecuencia, a partir de la Ecs. (4.13) y (4.12) obtenemos

$$(4.19) \quad \begin{aligned} U_I \left[\bar{z}_f(\vec{k}), t_f; z_i(\vec{k}), t_i \right] &= U \left[e^{i\omega_{\vec{k}} t_f} \bar{z}_f(\vec{k}), t_f; e^{-i\omega_{\vec{k}} t_i} z_i(\vec{k}), t_i \right] = \\ &= \exp \left\{ \int \left(\frac{d^3 k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \left[\bar{z}_f(\vec{k}) z_i(\vec{k}) + \right. \right. \\ &+ i \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \bar{z}_f(\vec{k}) e^{i\omega_{\vec{k}} t} f(\vec{k}, t) + f^*(\vec{k}, t) e^{-i\omega_{\vec{k}} t} z_i(\vec{k}) \right\} - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt' f^*(\vec{k}, t) \left\{ \theta(t - t') e^{-i\omega_{\vec{k}}(t - t')} + \right. \\ &\left. \left. + \theta(t' - t) e^{-i\omega_{\vec{k}}(t' - t)} \right\} f(\vec{k}, t') \right] \left. \right\} . \end{aligned}$$

El *núcleo auxiliar* del operador de evolución de la descripción de interacción se obtiene multiplicando la anterior expresión por la inversa del *núcleo reproductor* del espacio de Bargmann - Fock (ver Ec. (2.55)), que en el presente caso se escribe como

$$(4.20) \quad \exp \left\{ \int \left(\frac{d^3 k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \bar{z}_f(\vec{k}) z_i(\vec{k}) \right\} ,$$

lo que compensa exactamente el primer término del argumento de la exponencial en el segundo miembro de la Ec. (4.19).

En definitiva, para el núcleo auxiliar del operador de dispersión obtenemos la expresión

$$(4.21) \quad \begin{aligned} S_0^N \left[\bar{z}_f(\vec{k}), z_i(\vec{k}) \right] &= \\ &= \exp \left\{ \int \left(\frac{d^3 k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \left[i \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \bar{z}_f(\vec{k}) e^{i\omega_{\vec{k}} t} f(\vec{k}, t) + f^*(\vec{k}, t) e^{-i\omega_{\vec{k}} t} z_i(\vec{k}) \right\} - \right. \right. \\ &- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' f^*(\vec{k}, t) \left\{ \theta(t - t') e^{-i\omega_{\vec{k}}(t - t')} + \right. \\ &\left. \left. + \theta(t' - t) e^{-i\omega_{\vec{k}}(t' - t)} \right\} f(\vec{k}, t') \right] \left. \right\} , \end{aligned}$$

a partir de la cual podemos obtener la expresión de este operador en orden normal mediante el cambio

$$(4.22) \quad S_0^N [\bar{z}_f(\vec{k}), z_i(\vec{k})] \longrightarrow : S_0^N [a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}}] : = S_0.$$

En términos de la fuente externa $j(x)$ podemos escribir

$$(4.23) \quad \begin{aligned} & \imath \int \left(\frac{d^3 k}{2 \omega_{\vec{k}}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dt \bar{z}_f(\vec{k}) e^{\imath \omega_{\vec{k}} t} f(\vec{k}, t) = \\ & = \imath \int d^4 x j(\vec{x}, t) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \left(\frac{d^3 k}{2 \omega_{\vec{k}}} \right) e^{\imath k \cdot x} \bar{z}_f(\vec{k}), \end{aligned}$$

y similarmente

$$(4.24) \quad \begin{aligned} & \imath \int \left(\frac{d^3 k}{2 \omega_{\vec{k}}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dt f^*(\vec{k}, t) e^{-\imath \omega_{\vec{k}} t} z_i(\vec{k}) = \\ & = \imath \int d^4 x j(\vec{x}, t) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \left(\frac{d^3 k}{2 \omega_{\vec{k}}} \right) e^{-\imath k \cdot x} z_i(\vec{k}), \end{aligned}$$

expresiones en las que hemos introducido el tetravector $k := (\omega_{\vec{k}}, \vec{k})$, que satisface $k^2 = \omega_{\vec{k}}^2 - \vec{k}^2 = m^2$.

Por su parte, para el último término en el argumento de la exponencial en el segundo miembro de la Ec. (4.21) tenemos

$$(4.25) \quad \begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int \left(\frac{d^3 k}{2 \omega_{\vec{k}}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' f^*(\vec{k}, t) \left\{ \theta(t-t') e^{-\imath \omega_{\vec{k}} (t-t')} + \right. \\ & \quad \left. + \theta(t'-t) e^{-\imath \omega_{\vec{k}} (t'-t)} \right\} f(\vec{k}, t') = \\ & = \frac{\imath}{2} \int d^4 x \int d^4 x' j(x) G_F(x-x') j(x'), \end{aligned}$$

donde la expresión *escalar*

$$(4.26) \quad \begin{aligned} G_F(x) &= \frac{\imath}{(2\pi)^3} \int \left(\frac{d^3 k}{2 \omega_{\vec{k}}} \right) \left\{ \theta(t) e^{-\imath k \cdot x} + \theta(-t) e^{\imath k \cdot x} \right\} = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int d^4 k \frac{e^{-\imath k \cdot x}}{k^2 - m^2 + \imath \varepsilon} \end{aligned}$$

es la *función de Green de Feynman* del operador de Klein - Gordon,

$$(4.27) \quad (\partial^2 + m^2) G_F(x) = \delta(x).$$

Reemplazando en la expresión del núcleo auxiliar del operador de dispersión dada en la Ec. (4.21) obtenemos

$$(4.28) \quad S_0^N \left[\bar{z}_f(\vec{k}), z_i(\vec{k}) \right] = \exp \left\{ i \int d^4x j(x) \varphi_{as}(x) + \frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y j(x) G_F(x-y) j(y) \right\} ,$$

donde el *campo clásico asintótico* definido como

$$(4.29) \quad \varphi_{as}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \left(\frac{d^3k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \left\{ e^{i k \cdot x} \bar{z}_f(\vec{k}) + e^{-i k \cdot x} z_i(\vec{k}) \right\}$$

es una solución de la ecuación homogénea de Klein - Gordon,

$$(4.30) \quad (\partial^2 + m^2) \varphi_{as}(x) = 0 ,$$

determinada por *condiciones de contorno de Feynman*, vale decir, condiciones iniciales (para $t \rightarrow -\infty$) para las frecuencias *positivas* ($e^{-i k \cdot x}$), y condiciones finales (para $t \rightarrow +\infty$) para las frecuencias *negativas* ($e^{i k \cdot x}$).

Nótese que la expresión encontrada para $S_0^N \left[\bar{z}_f(\vec{k}), z_i(\vec{k}) \right]$ es *covariante relativista*, y que en ella ha aparecido naturalmente la función de Green de Feynman.

Finalmente, la expresión del operador de dispersión en orden normal se obtiene como

$$(4.31) \quad S_0[j(x)] = : S_0^N [a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}}] : = \exp \left\{ i \int d^4x j(x) \varphi_I(x) \right\} : \mathcal{Z}_0[j(x)] ,$$

donde el campo clásico asintótico $\varphi_{as}(x)$ aparece reemplazado por el *operador de campo en la descripción de interacción*,

$$(4.32) \quad \varphi_I(x) = \varphi_I(\vec{x}, t) = e^{i H_0 t} \varphi_S(\vec{x}) e^{-i H_0 t} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \left(\frac{d^3k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \left\{ a_{\vec{k}}^\dagger e^{i k \cdot x} + a_{\vec{k}} e^{-i k \cdot x} \right\} ,$$

también solución de la ecuación de Klein - Gordon homogénea, y donde

$$(4.33) \quad \mathcal{Z}_0[j(x)] = \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y j(x) G_F(x-y) j(y) \right\}$$

es la *funcional generatriz* del campo escalar libre.

En particular, para el valor medio de vacío tenemos

$$(4.34) \quad \langle \Omega_0 | S_0[j(x)] | \Omega_0 \rangle = \mathcal{Z}_0[j(x)] ,$$

de modo que $\mathcal{Z}_0[j(x)]$ representa la *amplitud de probabilidad de persistencia del vacío* en presencia de la fuente externa.

Teniendo en cuenta que la teoría de perturbaciones conduce a

$$(4.35) \quad S_0[j(x)] \simeq \mathbf{T} \exp \left\{ i \int d^4x \, j(x) \varphi_I(x) \right\},$$

vemos que de la igualdad (4.31) se deduce de inmediato el teorema de Wick (que relaciona productos de campos libres en orden cronológico con productos en orden normal). En particular, el *propagador* del campo escalar está dado por

$$(4.36) \quad \langle \Omega_0 | \mathbf{T} \{ \varphi_I(x) \varphi_I(y) \} | \Omega_0 \rangle = -i G_F(x - y).$$

Similarmente,

$$(4.37) \quad \begin{aligned} & \langle \Omega_0 | \mathbf{T} \{ \varphi_I(x_1) \varphi_I(x_2) \dots \varphi_I(x_{2N}) \} | \Omega_0 \rangle = \\ & = (-i)^{2N} \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta j(x_{2N})} \mathcal{Z}_0[j] \Big|_{j(x) \equiv 0} = \\ & = \frac{(-i)^N}{2^N N!} \sum_{\text{permut.}} G_F(x_{k_1} - x_{k_2}) G_F(x_{k_3} - x_{k_4}) \dots G_F(x_{k_{2N-1}} - x_{k_{2N}}), \end{aligned}$$

donde la suma se realiza sobre las permutaciones de los $2N$ argumentos de los campos, $\{x_1, x_2, \dots, x_{2N}\}$, mientras que el valor medio del producto cronológico de un número *impar* de operadores de campo es nulo.

De la expresión para la funcional generatriz, Ec. (4.33), y de la Ec. (4.27) resulta que

$$(4.38) \quad \begin{aligned} & (\partial_x^2 + m^2) \left[-i \frac{\delta}{\delta j(x)} \right] \mathcal{Z}_0[j(\cdot)] = \\ & = (\partial_x^2 + m^2) \int d^4y \, G_F(x - y) j(y) \mathcal{Z}_0[j(\cdot)] = j(x) \mathcal{Z}_0[j(\cdot)], \end{aligned}$$

de manera que el operador de dispersión dado en la Ec. (4.31) también puede ser escrito como

$$(4.39) \quad \begin{aligned} & S_0[j(x)] = \\ & = : \exp \left\{ i \int d^4x \, \varphi_I(x) (\partial_x^2 + m^2) \left[-i \frac{\delta}{\delta j(x)} \right] \right\} : \mathcal{Z}_0[j(x)], \end{aligned}$$

expresión que nos facilitará dar una solución perturbativa para la funcional generatriz en el caso de campos en autointeracción.

4.2. Operador de dispersión para campos en autointeracción. Consideremos ahora un campo escalar en autointeracción descrito por la acción

$$(4.40) \quad I[\varphi, j] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial\varphi(x))^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi(x)^2 - V(\varphi(x)) + j(x) \varphi(x) \right\},$$

donde supondremos que el potencial $V(\varphi)$ es polinómico y que cada uno de sus monomios tiene un coeficiente dependiente de las coordenadas de soporte compacto (que tenderá a cubrir todo el espacio de Minkowski al final del cálculo). Así, para $|t| > T$ el campo será libre y podremos definir correctamente la representación de interacción.

En esas condiciones, la teoría de perturbaciones nos provee del siguiente desarrollo asintótico (en las constantes de acoplamiento) para el operador de dispersión,

$$(4.41) \quad \begin{aligned} S[j(\cdot)] &\simeq \mathbf{T} \exp \left\{ i \int d^4x [j(x) \varphi_I(x) - V(\varphi_I(x))] \right\} = \\ &= \exp \left\{ -i \int d^4x V \left(-i \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) \right\} \mathbf{T} \exp \left\{ i \int d^4x j(x) \varphi_I(x) \right\} = \\ &= \exp \left\{ -i \int d^4x V \left(-i \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) \right\} S_0[j(x)]. \end{aligned}$$

Empleando la Ec. (4.39) y teniendo en cuenta que las derivadas funcionales respecto de la fuente externa conmutan entre sí y con las derivadas respecto de las coordenadas, podemos escribir

$$(4.42) \quad \begin{aligned} S[j(x)] &= \\ &= : \exp \left\{ i \int d^4x \varphi_I(x) (\partial_x^2 + m^2) \left[-i \frac{\delta}{\delta j(x)} \right] \right\} : \mathcal{Z}[j(x)], \end{aligned}$$

donde la *funcional generatriz de funciones de Green* del campo escalar en autointeracción, $\mathcal{Z}[j(x)]$, tiene el desarrollo asintótico (en los acoplamientos)

$$(4.43) \quad \mathcal{Z}[j(x)] \simeq \exp \left\{ -i \int d^4x V \left(-i \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) \right\} \mathcal{Z}_0[j(x)].$$

Estas expresiones, obtenidas de la formulación de la Teoría Cuántica de Campos en términos de integrales funcionales, son idénticas a las que resultan de la formulación operacional (Cuantización Canónica), de manera que este desarrollo asintótico puede ser representado en términos de *diagramas de Feynman*. De hecho, las *reglas de Feynman* pueden ser derivadas de las Ecs. (4.43) y (4.33).

4.3. La funcional generatriz como integral funcional sobre los campos conjugados. A partir de la representación del núcleo del operador de evolución de la Ec. (4.11), y teniendo en cuenta la relación que lo liga al núcleo del operador de dispersión, Ecs. (4.13) y (4.14), podemos escribir

$$\begin{aligned}
 S_0 \left[\bar{z}_f(\vec{k}), z_i(\vec{k}) \right] &= \\
 &= \lim_{t_f \rightarrow +\infty} \lim_{t_i \rightarrow -\infty} U \left[e^{i\omega_{\vec{k}} t_f} \bar{z}_f(\vec{k}), t_f; e^{-i\omega_{\vec{k}} t_i} z_i(\vec{k}), t_i \right] = \\
 &= \lim_{t_f \rightarrow +\infty} \lim_{t_i \rightarrow -\infty} \int_{z(\vec{k}, t_i) = e^{-i\omega_{\vec{k}} t_i} z_i(\vec{k})}^{\bar{z}(\vec{k}, t_f) = e^{i\omega_{\vec{k}} t_f} \bar{z}_f(\vec{k})} \mathcal{D} \left[\bar{z}(\vec{k}, t), z(\vec{k}, t) \right] \times \\
 (4.44) \quad &\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \int \left(\frac{d^3 k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \left[\bar{z}(\vec{k}, t_f) z(\vec{k}, t_f) + \bar{z}(\vec{k}, t_i) z(\vec{k}, t_i) \right] \right\} \times \\
 &\times \exp \left\{ i \int \left(\frac{d^3 k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{1}{2i} \left[\dot{\bar{z}}(\vec{k}, t) z(\vec{k}, t) - \bar{z}(\vec{k}, t) \dot{z}(\vec{k}, t) \right] - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. -\omega_{\vec{k}} \bar{z}(\vec{k}, t) z(\vec{k}, t) + f^*(\vec{k}, t) z(\vec{k}, t) + f(\vec{k}, t) \bar{z}(\vec{k}, t) \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Reemplazando $f(\vec{k}, t)$ en términos de la fuente externa $j(x)$ (ver Ec. (4.9)) obtenemos

$$\begin{aligned}
 S_0 \left[\bar{z}_f(\vec{k}), z_i(\vec{k}) \right] &= \\
 &= \lim_{t_f \rightarrow +\infty} \lim_{t_i \rightarrow -\infty} \int_{z(\vec{k}, t_i) = e^{-i\omega_{\vec{k}} t_i} z_i(\vec{k})}^{\bar{z}(\vec{k}, t_f) = e^{i\omega_{\vec{k}} t_f} \bar{z}_f(\vec{k})} \mathcal{D} \left[\bar{z}(\vec{k}, t), z(\vec{k}, t) \right] \times \\
 (4.45) \quad &\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \int \left(\frac{d^3 k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \left[\bar{z}(\vec{k}, t_f) z(\vec{k}, t_f) + \bar{z}(\vec{k}, t_i) z(\vec{k}, t_i) \right] \right\} \times \\
 &\times \exp \left\{ i \int \left(\frac{d^3 k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{1}{2i} \left[\dot{\bar{z}}(\vec{k}, t) z(\vec{k}, t) - \bar{z}(\vec{k}, t) \dot{z}(\vec{k}, t) \right] - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. -\omega_{\vec{k}} \bar{z}(\vec{k}, t) z(\vec{k}, t) \right) \right\} \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3 x j(x) \varphi(x) \right\},
 \end{aligned}$$

donde el campo $\varphi(x)$ es definido como

$$(4.46) \quad \varphi(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \left(\frac{d^3 k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \left\{ \bar{z}(\vec{k}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} + z(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right\}.$$

Definiendo el *campo conjugado* $\pi(x)$ como

$$(4.47) \quad \pi(x) := \frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \left(\frac{d^3 k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \omega_{\vec{k}} \left\{ \bar{z}(\vec{k}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} - z(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\},$$

resulta un ejercicio directo comprobar que

$$(4.48) \quad \begin{aligned} H_0 [\pi(x), \varphi(x)] &= \int d^3 x \left\{ \frac{1}{2} \pi(x)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi(x))^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi(x)^2 \right\} = \\ &= \int \left(\frac{d^3 k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \omega_{\vec{k}} \bar{z}(\vec{k}, t) z(\vec{k}, t). \end{aligned}$$

Similarmente,

$$(4.49) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{2} \int d^3 x [\pi(x) \dot{\varphi}(x) - \dot{\pi}(x) \varphi(x)] = \\ &= \frac{1}{2i} \int \left(\frac{d^3 k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) [\dot{z}(\vec{k}, t) z(\vec{k}, t) - \bar{z}(\vec{k}, t) \dot{z}(\vec{k}, t)]. \end{aligned}$$

Entonces, el exponente en el segundo factor en el integrando del segundo miembro de la Ec. (4.45) es (a menos de términos de borde) i veces la *acción clásica* del campo escalar libre evaluada en $[\pi(x), \varphi(x)]$,

$$(4.50) \quad \begin{aligned} I_0 [\pi(x), \varphi(x)] &:= \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{1}{2} \int d^3 x [\pi(x) \dot{\varphi}(x) - \dot{\pi}(x) \varphi(x)] - H_0 [\pi(x), \varphi(x)] \right\}, \end{aligned}$$

de modo que el núcleo del operador de dispersión puede representarse como

$$(4.51) \quad \begin{aligned} S_0 [\bar{z}_f(\vec{k}), z_i(\vec{k})] &= \\ &= \lim_{t_f \rightarrow +\infty} \lim_{t_i \rightarrow -\infty} \int_{z(\vec{k}, t_i) = e^{-i\omega_{\vec{k}} t_i} z_i(\vec{k})}^{\bar{z}(\vec{k}, t_f) = e^{i\omega_{\vec{k}} t_f} \bar{z}_f(\vec{k})} \mathcal{D} [\bar{z}(\vec{k}, t), z(\vec{k}, t)] \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \int \left(\frac{d^3 k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) [\bar{z}(\vec{k}, t_f) z(\vec{k}, t_f) + \bar{z}(\vec{k}, t_i) z(\vec{k}, t_i)] \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ i I_0 [\pi(x), \varphi(x)] + i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3 x j(x) \varphi(x) \right\}, \end{aligned}$$

donde la integral funcional se interpreta como una suma de contribuciones provenientes de configuraciones de los campos conjugados sometidos a condiciones de

contorno que corresponden a requerir un *comportamiento asintótico libre* (superposición de ondas planas) para las frecuencias positivas en el límite $t \rightarrow -\infty$ y para las frecuencias negativas en el límite $t \rightarrow +\infty$.

Teniendo en cuenta las Ecs. (4.13), (4.31) y (4.34), y recordando que la convergencia de las integrales requiere la introducción de una parte imaginaria negativa en la variable temporal (que, en el límite de la traza, hace dominante la contribución del vacío), vemos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}_0[j(x)] &= \lim_{t_f \rightarrow +\infty} \lim_{t_i \rightarrow -\infty} \langle \Omega_0 | e^{-\imath H_0 t_f} U_I(t_f, t_i) e^{\imath H_0 t_i} | \Omega_0 \rangle = \\
 &= \lim_{t_f \rightarrow +\infty} \lim_{t_i \rightarrow -\infty} \text{Tr} U(t_f, t_i) = \int \mathcal{D} [\bar{w}(\vec{k}), w(\vec{k})] \times \\
 &\times e^{-\int \left(\frac{d^3 k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \bar{w}(\vec{k}) w(\vec{k})} U[\bar{w}(\vec{k}), +\infty; w(\vec{k}), -\infty] = \\
 (4.52) \quad &= \lim_{t_f \rightarrow +\infty} \lim_{t_i \rightarrow -\infty} \int \mathcal{D} [\bar{w}(\vec{k}), w(\vec{k})] e^{-\int \left(\frac{d^3 k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) \bar{w}(\vec{k}) w(\vec{k})} \times \\
 &\times \int_{z(\vec{k}, t_i)=w(\vec{k})}^{\bar{z}(\vec{k}, t_f)=\bar{w}(\vec{k})} \mathcal{D} [\bar{z}(\vec{k}, t), z(\vec{k}, t)] \times \\
 &\times e^{\frac{1}{2} \int \left(\frac{d^3 k}{2\omega_{\vec{k}}} \right) [\bar{w}(\vec{k}) z(\vec{k}, t_f) + \bar{z}(\vec{k}, t_i) w(\vec{k})]} \times \\
 &\times \exp \left\{ \imath I_0 [\pi(x), \varphi(x)] + \imath \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3 x j(x) \varphi(x) \right\}.
 \end{aligned}$$

Argumentos similares a los invocados en el caso de un único grado de libertad (ver Sección 2.3) sugieren que a esta integral funcional sólo contribuyen configuraciones de $\bar{z}(\vec{k}, t)$ y $z(\vec{k}, t)$ (y, por lo tanto, de $\varphi(\vec{x}, t)$ y $\pi(\vec{x}, t)$) que se cierran al cabo del intervalo de tiempo $T = t_f - t_i$. Para ellas los términos de borde se cancelan exactamente con la medida de integración de la traza.

Por otra parte, el cambio de variables de integración $[\bar{z}(\vec{k}, t), z(\vec{k}, t)] \rightarrow [\varphi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}, t)]$ va acompañado de un Jacobiano *constante*, dado que la relación entre ellas es lineal (ver Ecs. (4.46) y (4.47)).

En consecuencia, incorporando ese factor constante en la medida de integración, podemos representar formalmente a la funcional generatriz del campo escalar sin autointeracción como una integral funcional sobre trayectorias cerradas de los campos conjugados, cuyo integrando es la exponencial de $\imath$ veces la acción clásica del campo,

$$(4.53) \quad \mathcal{Z}_0[j(x)] = \oint \mathcal{D}[\pi(x), \varphi(x)] \exp \left\{ \imath \int d^4x \left[\pi(x) \dot{\varphi}(x) - \frac{1}{2} \pi(x)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \varphi(x))^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi(x)^2 + j(x) \varphi(x) \right] \right\}.$$

Integrando sobre el campo $\pi(x)$ (aprovechando la dependencia cuadrática en este campo conjugado y generalizando lo hecho en la Sección 1.1) obtenemos

$$(4.54) \quad \mathcal{Z}_0[j(x)] = \oint \mathcal{D}[\varphi(x)] \exp \left\{ \imath \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial \varphi(x))^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi(x)^2 + j(x) \varphi(x) \right] \right\},$$

donde hemos incluido un factor constante en la medida de integración y el argumento de la exponencial es ahora $\imath$ veces la acción clásica del campo escalar acoplado a la fuente externa, escrita como la integral de su densidad Lagrangiana,

$$(4.55) \quad I_0[\varphi, j] = \int d^4x [\mathcal{L}_0(\varphi(x), \partial \varphi(x)) + j(x) \varphi(x)].$$

4.4. Funciones de Green generales de la teoría. De las Ecs. (4.35) y (4.31) vemos que tenemos la siguiente representación para los valores medios de vacío de productos cronológicos de operadores de campo en la descripción de interacción,

$$(4.56) \quad \begin{aligned} & \langle \Omega_0 | \mathbf{T} \left\{ e^{\imath \int d^4x j(x) \varphi_I(x)} \varphi_I(x_1) \dots \varphi_I(x_{2N}) \right\} | \Omega_0 \rangle = \\ & = (-\imath)^{2N} \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta j(x_{2N})} \langle \Omega_0 | S_0[j] | \Omega_0 \rangle = \\ & = (-\imath)^{2N} \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta j(x_{2N})} \mathcal{Z}_0[j] = \\ & = \oint \mathcal{D}[\varphi(x)] e^{\imath I_0[\varphi, j]} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2N}) \end{aligned}$$

que, para $j(x) \equiv 0$, se reduce a

$$(4.57) \quad \begin{aligned} & \langle \Omega_0 | \mathbf{T} \{ \varphi_I(x_1) \dots \varphi_I(x_{2N}) \} | \Omega_0 \rangle = \\ & = \oint \mathcal{D}[\varphi(x)] e^{\imath \int d^4x \mathcal{L}_0(\varphi(x), \partial\varphi(x))} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2N}). \end{aligned}$$

Empleando el desarrollo asintótico de la Ec. (4.43) y la representación de la Ec. (4.54), podemos escribir para la funcional generatriz del campo escalar en autointeracción

$$(4.58) \quad \begin{aligned} \mathcal{Z}[j(x)] & \simeq e^{-\imath \int d^4x V\left(-\imath \frac{\delta}{\delta j(x)}\right)} \oint \mathcal{D}[\varphi(x)] e^{\imath I_0[\varphi, j]} \simeq \\ & \simeq \oint \mathcal{D}[\varphi(x)] \exp \left\{ \imath \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial\varphi(x))^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi(x)^2 - V(\varphi(x)) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + j(x) \varphi(x) \right] \right\} = \oint \mathcal{D}[\varphi(x)] e^{\imath I[\varphi, j]}, \end{aligned}$$

donde

$$(4.59) \quad \begin{aligned} I[\varphi, j] & = I[\varphi] + \int d^4x j(x) \varphi(x) = \\ & = \int d^4x [\mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x)) + j(x) \varphi(x)] \end{aligned}$$

es la acción clásica del campo escalar en autointeracción acoplado a la fuente externa, escrita como la integral de su densidad Lagrangiana.

Consideremos ahora el producto ordenado cronológicamente de n operadores de campo en la descripción de Heisenberg (con autointeracción y en presencia de la fuente externa),

$$(4.60) \quad \mathbf{T} \{ \varphi_H(x_1) \varphi_H(x_2) \dots \varphi_H(x_n) \} = \varphi_H(x_1) \varphi_H(x_2) \dots \varphi_H(x_n)$$

si $t_1 > t_2 > \dots > t_n$.

Teniendo en cuenta que

$$(4.61) \quad \varphi_H(\vec{x}, t) = U_I(t)^\dagger \varphi_I(\vec{x}, t) U_I(t),$$

donde $U_I(t)$ admite el desarrollo asintótico

$$(4.62) \quad U_I(t) \simeq \mathbf{T} \exp \left\{ \imath \int_{-\infty}^t dt \int d^3x [j(x) \varphi_I(x) - V(\varphi_I(x))] \right\},$$

podemos escribir

(4.63)

$$\begin{aligned} & \varphi_H(x_1)\varphi_H(x_2)\dots\varphi_H(x_n) = \\ & = U_I(T)^\dagger U_I(T, t_1)\varphi_I(x_1)U_I(t_1, t_2)\varphi_I(x_2)\dots\varphi_I(x_n)U_I(t_n, -T)U_I(-T) \simeq U_I(T)^\dagger \times \\ & \times \mathbf{T} \left\{ e^{\imath \int_{-T}^T dt \int d^3x [j(x)\varphi_I(x) - V(\varphi_I(x))]} \varphi_I(x_1)\varphi_I(x_2)\dots\varphi_I(x_n) \right\} U_I(-T), \end{aligned}$$

para todo $T > |t_k|, k = 1, \dots, n$. En el límite $T \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\begin{aligned} & \mathbf{T} \{ \varphi_H(x_1)\varphi_H(x_2)\dots\varphi_H(x_n) \} \simeq S[j]^\dagger \times \\ (4.64) \quad & \times \mathbf{T} \left\{ e^{\imath \int d^4x [j(x)\varphi_I(x) - V(\varphi_I(x))]} \varphi_I(x_1)\varphi_I(x_2)\dots\varphi_I(x_n) \right\}. \end{aligned}$$

Ahora bien, para $j(x) \equiv 0$ el valor medio de vacío de la anterior expresión es

(4.65)

$$\begin{aligned} & \langle \Omega_0 | \mathbf{T} \{ \varphi_H(x_1)\varphi_H(x_2)\dots\varphi_H(x_n) \} | \Omega_0 \rangle|_{j=0} \simeq \\ & \simeq \langle \Omega_0 | S[j=0]^\dagger \mathbf{T} \left\{ e^{-\imath \int d^4x V(\varphi_I(x))} \varphi_I(x_1)\varphi_I(x_2)\dots\varphi_I(x_n) \right\} | \Omega_0 \rangle. \end{aligned}$$

Y si suponemos que el estado de vacío del campo en autointeracción es *estable* (en efecto, si $|\Omega_0\rangle$ es el estado de mínima energía del campo, éste no puede decaer en el tiempo), entonces debe ser

$$(4.66) \quad S[j=0]|\Omega_0\rangle = e^{i\theta}|\Omega_0\rangle,$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$ dado por

$$(4.67) \quad e^{i\theta} = \langle \Omega_0 | S[j=0] | \Omega_0 \rangle = \mathcal{Z}[j=0].$$

En consecuencia, tenemos que

$$\begin{aligned} & \mathcal{Z}[j=0] \langle \Omega_0 | \mathbf{T} \{ \varphi_H(x_1)\varphi_H(x_2)\dots\varphi_H(x_n) \} | \Omega_0 \rangle|_{j=0} \simeq \\ (4.68) \quad & \simeq \langle \Omega_0 | \mathbf{T} \left\{ e^{-\imath \int d^4x V(\varphi_I(x))} \varphi_I(x_1)\varphi_I(x_2)\dots\varphi_I(x_n) \right\} | \Omega_0 \rangle. \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo uso de las Ecs. (4.41), (4.42), (4.43) y (4.58), obtenemos para los productos de operadores de campo en la descripción de Heisenberg ordenados cronológicamente la expresión

$$\begin{aligned}
 (4.69) \quad & \mathcal{Z}[j=0] \langle \Omega_0 | \mathbf{T} \{ \varphi_H(x_1) \varphi_H(x_2) \dots \varphi_H(x_n) \} | \Omega_0 \rangle \Big|_{j=0} = \\
 & = (-i)^n \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta j(x_n)} \langle \Omega_0 | S[j] | \Omega_0 \rangle \Big|_{j=0} = \\
 & = (-i)^n \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta j(x_n)} \mathcal{Z}[j] \Big|_{j=0} = \\
 & = \oint \mathcal{D}[\varphi(x)] e^{iI[\varphi]} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \simeq \\
 & \simeq e^{-i \int d^4x V \left(-i \frac{\delta}{\delta j(x)} \right)} (-i)^n \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta j(x_n)} \mathcal{Z}_0[j] \Big|_{j=0}.
 \end{aligned}$$

El desarrollo asintótico (en las constantes de acoplamiento) del miembro de la derecha de esta ecuación conduce al desarrollo perturbativo de las *funciones de Green generales de la teoría*, definidas como

$$\begin{aligned}
 (4.70) \quad & G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \langle \Omega_0 | \mathbf{T} \{ \varphi_H(x_1) \dots \varphi_H(x_n) \} | \Omega_0 \rangle \Big|_{j=0} = \\
 & = \frac{1}{\mathcal{Z}[j=0]} (-i)^n \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta j(x_n)} \mathcal{Z}[j] \Big|_{j=0}.
 \end{aligned}$$

Estas son funciones *simétricas* de sus argumentos cuyo desarrollo puede ser representado gráficamente mediante diagramas de Feynman (ver Apéndice A). En particular, el factor $\mathcal{Z}[j=0]$ en el denominador del miembro de la derecha de la Ec. (4.70) cancela la contribución de los *subdiagramas de vacío* a la función de Green.

Formalmente, la *funcional generatriz de funciones de Green* de la teoría admite el siguiente desarrollo en *serie de Taylor funcional*,

$$\begin{aligned}
 \langle \Omega_0 | \mathbf{T} \exp \left\{ i \int d^4x j(x) \left(\varphi_H(x) \Big|_{j=0} \right) \right\} | \Omega_0 \rangle &= \\
 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_n j(x_1) \dots j(x_n) G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= \\
 (4.71) \qquad \qquad \qquad &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_n j(x_1) \dots j(x_n) \times \\
 &\times \left(\frac{\delta}{\delta j(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta j(x_n)} \frac{\mathcal{Z}[j]}{\mathcal{Z}[j=0]} \Big|_{j=0} \right) = \frac{\mathcal{Z}[j]}{\mathcal{Z}[j=0]},
 \end{aligned}$$

lo que justifica su denominación.

4.5. Ecuación de movimiento para $\mathcal{Z}[j]$. El desarrollo perturbativo de $\mathcal{Z}[j]$ permite *justificar* una serie de manipulaciones formales a las que es posible someter a las integrales funcionales, como *cambios de variables* o *integraciones por partes*.

Por ejemplo, consideremos un cambio infinitesimal en las variables de integración,

$$(4.72) \qquad \qquad \qquad \varphi(x) = \chi(x) + \varepsilon F[\chi, x],$$

donde $\varepsilon \neq 0$ con $|\varepsilon| \ll 1$, y $F[\chi, x]$ es cierta funcional con dependencia de la posición, que supondremos admite un desarrollo en potencias del nuevo campo $\chi(x)$. En ese caso, la relación entre $\varphi(x)$ y $\chi(x)$ puede ser invertida a un dado orden en los campos, de manera que esta transformación es no singular.

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
 \delta\varphi(x) &\cong \delta\chi(x) + \varepsilon \int d^4y \frac{\delta F[\chi, x]}{\delta\chi(y)} \delta\chi(y) = \\
 (4.73) \qquad &= \int d^4y \left\{ \delta(x-y) + \varepsilon \frac{\delta F[\chi, x]}{\delta\chi(y)} \right\} \delta\chi(y),
 \end{aligned}$$

de modo que el Jacobiano de la transformación es

$$\begin{aligned}
 J[\chi] &\cong \text{Det} \left\{ \delta(x-y) + \varepsilon \frac{\delta F[\chi, x]}{\delta \chi(y)} \right\} = \\
 (4.74) \quad &= \exp \text{Tr} \log \left\{ \delta(x-y) + \varepsilon \frac{\delta F[\chi, x]}{\delta \chi(y)} \right\} \cong \\
 &\approx 1 + \varepsilon \text{Tr} \left\{ \frac{\delta F[\chi, x]}{\delta \chi(y)} \right\} = 1 + \varepsilon \int d^4x \left. \frac{\delta F[\chi, x]}{\delta \chi(y)} \right|_{y=x}.
 \end{aligned}$$

Entonces, de la representación de la Ec. (4.58) resulta que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}[j] &= \oint \mathcal{D}[\varphi(x)] e^{iI[\varphi, j]} = \\
 &= \oint \mathcal{D}[\chi(x)] J[\chi] e^{iI[\chi + \varepsilon F[\chi, x], j]} \cong \\
 (4.75) \quad &\cong \oint \mathcal{D}[\chi(x)] e^{iI[\chi, j]} \left\{ 1 + \right. \\
 &\quad \left. \varepsilon \int d^4x \left[F[\chi, x] \frac{\delta I[\chi, j]}{\delta \chi(x)} + \left. \frac{\delta F[\chi, x]}{\delta \chi(y)} \right|_{y=x} \right] \right\} = \\
 &= \mathcal{Z}[j] + \varepsilon \int d^4x \oint \mathcal{D}[\chi(x)] \frac{\delta}{\delta \chi(x)} \left\{ F[\chi, x] e^{iI[\chi, j]} \right\},
 \end{aligned}$$

lo que debe ser cierto para todo ε pequeño y cualquiera que sea la funcional $F[\chi, x]$.

Por lo tanto, la integral funcional (sobre trayectorias cerradas) de una derivada funcional simple es nula.

Además, el coeficiente de ε también puede ser escrito como

$$(4.76) \quad \int d^4x \left[F[\chi, x] \frac{\delta I[\chi, j]}{\delta \chi(x)} + \frac{\delta F[\chi, x]}{\delta \chi(x)} \right]_{\chi \rightarrow (-i \frac{\delta}{\delta j})} \mathcal{Z}[j] = 0,$$

lo que debe ser cierto para toda funcional $F[\chi, x]$.

En particular, para una traslación rígida arbitraria de la variable de integración,

$$(4.77) \quad F[\chi, x] \equiv f(x), \quad \frac{\delta F[\chi, x]}{\delta \chi(y)} \equiv 0,$$

debe satisfacerse para todo x que

$$(4.78) \quad \left[\frac{\delta I[\chi, j]}{\delta \chi(x)} \right]_{\chi \rightarrow (-i \frac{\delta}{\delta j})} \mathcal{Z}[j] = \left[\frac{\delta I[\chi]}{\delta \chi(x)} \Big|_{\chi \rightarrow (-i \frac{\delta}{\delta j})} + j(x) \right] \mathcal{Z}[j] =$$

$$= - \left\{ (\partial^2 + m^2) \left(-i \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) + V' \left(-i \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) - j(x) \right\} \mathcal{Z}[j] = 0.$$

Esta expresión constituye una *ecuación cuántica de movimiento* para la funcional generatriz que, habida cuenta de su desarrollo de Taylor funcional, Ec. (4.71), impone una serie de relaciones entre las funciones de Green generales de la teoría.

APÉNDICE A. DIAGRAMAS DE FEYNMAN

A partir de la definición de las funciones de Green generales, Ec. (4.70), la teoría de perturbaciones conduce al desarrollo asintótico

$$(A.1) \quad \mathcal{Z}[j=0] G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-i)^n \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta j(x_n)} \mathcal{Z}[j] \Big|_{j=0} \simeq$$

$$\simeq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-i)^l}{l!} \int d^4 y_1 \dots \int d^4 y_l V \left(-i \frac{\delta}{\delta j(y_1)} \right) \dots V \left(-i \frac{\delta}{\delta j(y_l)} \right) \times$$

$$\times (-i)^n \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta j(x_n)} \mathcal{Z}_0[j] \Big|_{j=0}.$$

Para fijar ideas, consideremos el potencial de interacción

$$(A.2) \quad V(\varphi_I(y)) = \frac{\lambda}{4!} : [\varphi_I(y)]^4 :.$$

Para este caso, las funciones de Green con un número impar de argumentos son nulas, mientras que para las otras es necesario el cálculo de valores medios de vacío de productos cronológicos de la forma

$$(A.3) \quad \langle \Omega_0 | \mathbf{T} \left\{ \varphi_I(x_1) \dots \varphi_I(x_{2n}) : [\varphi_I(y_1)]^4 : \dots : [\varphi_I(y_l)]^4 : \right\} | \Omega_0 \rangle =$$

$$= (-i)^n \sum_{contrac.} G_F(z_{k_1} - z_{k_2}) \dots G_F(z_{k_{2N-1}} - z_{k_{2N}}),$$

donde $2N = 2n + 4l$ y la suma se realiza sobre todas las posibles *contracciones* entre pares de campos no contenidos en un mismo orden normal dentro del orden cronológico del miembro de la izquierda (Teorema de Wick - Ver Ecs. (4.31) y (4.35)).

De esa manera, cada término del desarrollo perturbativo de la Ec. (A.1) puede ser asociado a un *diagrama* en el cual los puntos $\{x_1, \dots, x_{2n}, y_1, \dots, y_l\}$ están unidos por líneas correspondientes a los *propagadores*, $-i G_F(z_i - z_j)$. Las *líneas externas* nacen en uno de los *puntos externos* $\{x_1, \dots, x_{2n}\}$, mientras que las *líneas internas* unen dos de los *vértices* $\{y_1, \dots, y_l\}$.

El número de líneas (internas o externas) que salen de cada vértice depende de la interacción; en el presente caso ese número es cuatro. El haber tomado la interacción en orden normal hace que no haya líneas que se cierren sobre el mismo vértice. Además, para esta autointeracción, a cada vértice corresponde un factor $-i\lambda/4!$.

Entonces, para calcular las contribuciones de orden l de la teoría de perturbaciones a la función de Green $G^{(2n)}(x_1, \dots, x_{2n})$ se deben considerar todos los posibles diagramas con $2n$ líneas externas y l vértices, descartando aquellos que contienen *subdiagramas de vacío*, es decir, partes no conexas del diagrama sin líneas externas (sólo propagadores entre vértices), ya que su contribución se ve cancelada exactamente por la del factor $\mathcal{Z}[0]$ en el miembro de la izquierda de la Ec. (A.1). Finalmente, se debe integrar sobre todas las posibles posiciones de los l vértices, dividir por $l!$ y sumar las contribuciones de todos esos diagramas.

Reemplazando los propagadores por sus transformadas de Fourier (ver Ec. (4.26)) e integrando primero sobre las posiciones de los vértices, obtenemos *las reglas de Feynman en el espacio de impulsos*.

Eso conduce a asociar con cada línea del diagrama un *propagador* de la forma

$$(A.4) \quad \frac{i}{k^2 - m^2 + i0},$$

donde k es el *tetraimpulso transportado por la línea*, y a cada uno de los l vértices una delta de Dirac que impone la *conservación local* de esos impulsos,

$$(A.5) \quad (2\pi)^4 \delta \left(\sum_{i=1}^4 k_i \right)$$

donde la suma en el argumento de la delta se hace sobre los *impulsos entrantes al vértice* considerado.

La invariancia traslacional de la teoría permite factorizar una de esas deltas para dar cuenta de la *conservación global del tetraimpulso*,

$$(A.6) \quad 2\pi^4 \delta \left(\sum_{i=1}^{2n} p_i \right)$$

donde la suma se realiza sobre los $2n$ impulsos p_i *entrantes* al diagrama a través de las E líneas externas.

Finalmente, se debe integrar sobre los I impulsos transportados por las líneas internas,

$$(A.7) \quad \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \cdots \int \frac{d^4 k_I}{(2\pi)^4}$$

Pero $l - 1$ de estas integrales se realizan trivialmente debido a la presencia de las $l - 1$ deltas de conservación local del tetraimpulso restantes. En consecuencia, sólo restan por realizar $L = I - l + 1$ integraciones sobre impulsos internos, número que coincide con el de los *circuitos independientes*, o *loops*, que es posible trazar sobre el diagrama.

A.1. Funciones de Green conexas. Cabe señalar que, a un dado orden l de la teoría de perturbaciones, habrá contribuciones a la función de Green de $2n$ argumentos que provengan de *diagramas no conexos*, formados por subdiagramas *conexos* que representan contribuciones a funciones de Green de menor número de argumentos y de orden $\leq l$.

En consecuencia, a un dado orden l de la teoría de perturbaciones, las *funciones de Green completas* pueden construirse recursivamente a partir de las *funciones de Green conexas*, definidas como la suma de las contribuciones provenientes de diagramas de Feynman conexas únicamente,

$$(A.8) \quad G^{(2n)}(x_1, \dots, x_{2n}) = G_C^{(2n)}(x_1, \dots, x_{2n}) + \sum_{\cup \{x\}_\alpha = \{x\}} \prod_{\alpha} G_C^{(|\alpha|)}(\{x\}_\alpha),$$

donde la suma se realiza sobre todas las particiones del conjunto de $2n$ argumentos $\{x\}$, $|\alpha|$ es el número de elementos en cada subconjunto y las funciones de Green conexas que aparecen en el producto están evaluadas al orden l , reteniéndose de ese producto términos de hasta ese orden. En particular, $G_C^{(2)}(x_1, x_2) = G^{(2)}(x_1, x_2)$.

En esas condiciones, se define la *funcional generatriz de funciones de Green conexas* como

$$(A.9) \quad \imath \mathcal{W}[j] := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\imath^n}{n!} \int d^4 x_1 \cdots \int d^4 x_n G_C^{(n)}(x_1, \dots, x_n) j(x_1) \cdots j(x_n),$$

de modo tal que

$$(A.10) \quad -\imath G_C^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (-\imath)^n \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta j(x_n)} \mathcal{W}[j] \Big|_{j=0}.$$

La relación dada en la Ec. (A.8) permite verificar que

$$(A.11) \quad e^{\imath \mathcal{W}[j]} \equiv \frac{\mathcal{Z}[j]}{\mathcal{Z}[j=0]}.$$

A.2. Elementos de matriz del operador S . La amplitud de probabilidad de transición de un estado inicial con n partículas de impulsos $\{p_1, \dots, p_n\}$ a un estado final con m partículas con impulsos $\{q_1, \dots, q_m\}$ está dada por el elemento de matriz

$$(A.12) \quad \langle q_1, \dots, q_m; +\infty | S[j=0] | p_1, \dots, p_n; -\infty \rangle = \langle q_1, \dots, q_m; +\infty | \times \\ \times : \exp \left\{ \imath \int d^4x \varphi_I(x) (\partial_x^2 + m^2) \left[-\imath \frac{\delta}{\delta j(x)} \right] \right\} : | p_1, \dots, p_n; -\infty \rangle \mathcal{Z}[j(x)] \Big|_{j=0}.$$

Si los impulsos son tales que $q_j \neq p_i, \forall i, j$, a ese elemento de matriz sólo contribuye el orden $n+m$ del desarrollo de Taylor de la exponencial dentro del orden normal (dado que son necesarios n operadores de destrucción y m de creación para obtener un resultado no nulo), de donde resulta que esa amplitud de probabilidad queda expresada como la transformada de Fourier (en todos sus argumentos) de

$$(A.13) \quad (\partial_{x_1}^2 + m^2) \dots (\partial_{x_{n+m}}^2 + m^2) G^{(n+m)}(x_1, \dots, x_{n+m}),$$

evaluada en los valores físicos de los impulsos *entrantes* y *salientes* (para los cuales tenemos que $p_i^2 = m^2, q_j^2 = m^2$).

Pero los operadores de Klein - Gordon en esa expresión corresponderían al producto por

$$(A.14) \quad \prod_{i=1}^n (-p_i^2 + m^2) \prod_{j=1}^m (-q_j^2 + m^2),$$

que es nulo para los valores físicos de los tetraimpulsos, lo que muestra que a la amplitud de probabilidad de transición sólo contribuye el *residuo* de la transformada de Fourier de la función de Green,

$$(A.15) \quad \mathcal{F} [G^{(n+m)}(x_1, \dots, x_{n+m})] = (2\pi)^4 \delta \left(\sum_{i=1}^{n+m} k_i \right) \tilde{G}^{(n+m)}(k_1, \dots, k_{n+m}),$$

en el polo múltiple que ella presenta para valores *on-shell* de sus argumentos.

En particular, la transformada de Fourier de la función de Green de dos puntos (el *propagador completo*) debe ser de la forma

$$(A.16) \quad -\imath \tilde{G}^{(2)}(k) \approx \frac{1}{k^2 - m^2} + \mathcal{O}(1),$$

para $k^2 \approx m^2$, donde m es la *masa física* de las partículas.

Consideremos ahora una función de Green conexas con N patas externas, calculada a cierto orden de la teoría de perturbaciones. Su transformada de Fourier recibe, en particular, las correcciones a las funciones de Green $\tilde{G}^{(2)}(k_i)$ asociadas a esas patas externas (hasta el orden que estamos considerando), las que presentan polos para valores on-shell de los impulsos entrantes. Esos polos son cancelados por los factores $(-k_i^2 + m^2)$ provenientes de los operadores de Klein - Gordon, de modo que lo que contribuye a la *parte conexas* de las amplitudes de probabilidad de transición son en realidad las *funciones de Green truncadas* de la teoría, definidas como

$$(A.17) \quad \tilde{G}_{trunc.}^{(N)}(k_1, \dots, k_N) := \left[\prod_{i=1}^N \tilde{G}^{(2)}(k_i) \right]^{-1} \tilde{G}_C^{(N)}(k_1, \dots, k_N).$$

Esto corresponde a la suma (hasta el orden considerado) de todos los diagramas de Feynman conexos *truncados*, es decir, aquellos en los que se desechan tanto los propagadores correspondientes a las líneas externas como las correcciones radiativas a las mismas, elementos a los que no se atribuye ningún factor para el cálculo de la contribución del diagrama.

A.3. Funciones propias - Acción efectiva. Un diagrama conexo truncado se dice *propio* (o *irreducible de una partícula*¹²) si sigue siendo conexo luego de cortar una cualquiera de sus líneas internas.

Los diagramas propios son los elementos fundamentales de la teoría de perturbaciones, puesto que a partir de ellos es posible construir cualquier otro diagrama combinándolos mediante el reemplazo sus patas amputadas por correcciones radiativas al propagador $\tilde{G}^{(2)}$.

Tienen la particularidad de que todo loop de un diagrama reducible está contenido en uno de sus subdiagramas propios, por lo que es posible integrar sobre los impulsos internos de cada uno de esos subdiagramas sin que los demás se vean involucrados. En particular, es necesario y suficiente eliminar las divergencias ultravioletas de las *funciones propias* para eliminarlas completamente de la teoría.

Las funciones propias pueden ser derivadas de una funcional generatriz llamada *acción efectiva*, que resulta ser la *transformada de Legendre funcional* de $\mathcal{W}[j]$.

¹²En inglés, *one-particle irreducible*.

En efecto, definamos la funcional de j

(A.18)

$$\begin{aligned} \varphi[j](x) &:= \frac{\delta \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)} = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{(n-1)!} \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_{n-1} G_C^{(n)}(x, x_1, \dots, x_{n-1}) j(x_1) \dots j(x_{n-1}). \end{aligned}$$

Como $G_C^{(2)}(x, y)$ se reduce a $G_F(x, y)$ al más bajo orden de la teoría de perturbaciones, ella define un operador integral con *inversa* (perturbativa). En esas condiciones, la relación entre φ y j puede ser invertida como una serie de potencias funcional en la primera, para obtener

(A.19)

$$j[\varphi](x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-1}{(n-1)!} \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_{n-1} \Gamma^{(n)}(x, x_1, \dots, x_{n-1}) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{n-1}).$$

La transformada de Legendre funcional de $\mathcal{W}[j]$ se define como

$$\Gamma[\varphi] := \left\{ \mathcal{W}[j] - \int d^4 x j(x) \frac{\delta \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)} \right\} \Big|_{j=j[\varphi]} =$$

(A.20)

$$= \mathcal{W}[j[\varphi]] - \int d^4 x j[\varphi](x) \varphi(x),$$

y se verifica que

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi(x)} &= \int d^4 y \left\{ \frac{\delta \mathcal{W}[j]}{\delta j(y)} \frac{\delta j(y)}{\delta \varphi(x)} - \frac{\delta j(y)}{\delta \varphi(x)} \varphi(y) - j(y) \delta(y-x) \right\} = \\ &= -j[\varphi](x), \end{aligned}$$

donde hemos empleado la regla de derivación funcional en cadena.

En definitiva, la acción efectiva

$$\Gamma[\varphi] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n),$$

donde los coeficientes $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ (funciones simétricas de todos sus argumentos) son las *funciones propias* de la teoría.

Esto puede verificarse tomando derivadas funcionales sucesivas respecto de φ de ambos miembros de la Ec. (A.18) y teniendo en cuenta la Ec. (A.19).

A.4. Desarrollo en *loops*. El desarrollo perturbativo de las funciones de Green puede ordenarse de acuerdo al número de loops de los diagramas, lo que puede entenderse como un *desarrollo semi-clásico*.

Consideremos un diagrama conexo con E líneas externas, I líneas internas y V vértices. Según las reglas de Feynman en el espacio de impulsos, a cada vértice le corresponde un factor $(2\pi)^4 \delta(\sum k_i)$ que impone la conservación local del tetraimpulso. Una de ellas puede ser factorizada para dar cuenta de la conservación global del impulso en el diagrama, mientras que las $V - 1$ restantes dejan un número

$$(A.23) \quad L = I - V + 1$$

de impulsos independientes sobre los cuales ha de integrarse.

Recuperando la constante $\hbar$ en la Ec. (4.58), vemos que la expresión de $Z[j]$ corresponde a la suma de contribuciones de la forma $\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} I[\varphi] + i \int j \varphi \right\}$ sobre las distintas configuraciones del campo $\varphi(x)$.

Podemos eliminar la constante $\hbar$ de los términos cuadráticos del Lagrangiano mediante el cambio de escala del campo $\varphi(x) \rightarrow \hbar^{\frac{1}{2}} \varphi(x)$, de modo que

$$(A.24) \quad \frac{1}{\hbar} \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) + j \varphi \rightarrow \mathcal{L}_0(\varphi, \partial\varphi) - \frac{1}{\hbar} V \left(\hbar^{\frac{1}{2}} \varphi \right) + \hbar^{\frac{1}{2}} j \varphi,$$

donde $\mathcal{L}_0(\varphi, \partial\varphi)$ es el Lagrangiano del campo escalar libre.

Ese cambio de escala introduce un Jacobiano constante (que puede ser absorbido en la medida de integración), y un factor $\hbar$ en el propagador del campo, $\left. \frac{\delta^2 \mathcal{Z}_0[j]}{\delta j^2} \right|_{j=0}$.

Cambiamos también la escala de las constantes de acoplamiento de manera tal que se compensen los factores adicionales de $\hbar^{\frac{1}{2}}$, dejando al término de interacción completo multiplicado por un factor $\hbar^{-1}$. Por ejemplo,

$$(A.25) \quad \frac{g}{3!} \varphi^3 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \rightarrow \frac{(\hbar^{-\frac{3}{2}} g)}{3!} \hbar^{\frac{3}{2}} \varphi^3 + \frac{(\hbar^{-2} \lambda)}{4!} \hbar^2 \varphi^4.$$

En esas condiciones, cada línea del diagrama de Feynman queda multiplicada por un factor $\hbar$, mientras que cada vértice gana un factor $\hbar^{-1}$. En consecuencia, el diagrama queda multiplicado por un factor $\hbar^{E+I-V}$.

Ahora bien, teniendo en cuenta que de la Ec. (A.23) resulta que $I - V = L - 1$, podemos escribir

$$(A.26) \quad \hbar^{E+I-V} = \hbar^{E+L-1},$$

de modo que las contribuciones a una dada función de Green (E fijo) están caracterizadas por una potencia de $\hbar$ que crece con el número de loops del correspondiente diagrama.

En particular, la contribución de un diagrama propio (irreducible y truncado) a la función de vértice $\Gamma(n)$ queda pesada por un factor $\hbar^{L-1}$.

En una teoría para la cual $V(\varphi)$ está dada por un único monomio en el campo, el número de loops cuenta el número de vértices y este desarrollo coincide con el perturbativo en potencias de la única constante de acoplamiento presente.

Por ejemplo, para $V(\varphi) = \lambda \varphi^4/4!$, el número de líneas que sale de cada vértice es 4, y esas líneas pueden ser externas (que llegan a un vértice) o internas (que unen dos vértices). Por lo tanto,

$$(A.27) \quad 4V = E + 2I \quad \Rightarrow \quad I = 2V - \frac{E}{2}$$

y la potencia de $\hbar$ correspondiente al diagrama es

$$(A.28) \quad E + L - 1 = E + I - V = \frac{E}{2} + V.$$

Pero en el caso en que $V(\varphi)$ sea la suma de varios monomios, el desarrollo en loops es un desarrollo en una constante que multiplica a todos los términos de interacción. Eso mantiene en cada orden del desarrollo las relaciones entre los distintos términos, preservando (formalmente) las simetrías de $V(\varphi)$.

Consideremos ahora las contribuciones a la acción efectiva $\Gamma[\varphi]$ del campo escalar con una autointeracción cuártica al orden más bajo del desarrollo en loops (0 -loops o *nivel árbol*).

Para la función de vértice propio de dos puntos, $\tilde{\Gamma}^{(2)} = \imath/\tilde{G}^{(2)}$, tenemos

$$(A.29) \quad \tilde{\Gamma}_0^{(2)}(k) = k^2 - m^2,$$

de modo que

$$(A.30) \quad \begin{aligned} \Gamma_0^{(2)}(x-y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{\imath(k \cdot x + k' \cdot y)} (2\pi)^4 \delta(k+k') (k^2 - m^2) = \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{\imath k \cdot (x-y)} (k^2 - m^2) = -(\partial_x^2 + m^2) \delta(x-y), \end{aligned}$$

que $\imath$ veces la inversa del propagador de Feynman.

Su contribución a la funcional $\Gamma[\varphi]$ está dada por

$$\begin{aligned}
 (A.31) \quad & \frac{1}{2!} \int d^4x \int d^4y \Gamma_0^{(2)}(x-y) \varphi(x) \varphi(y) \\
 &= -\frac{1}{2!} \int d^4x \varphi(x) (\partial_x^2 + m^2) \varphi(x) = \\
 &= \frac{1}{2} \int d^4x \{ \partial \varphi(x)^2 - m^2 \varphi(x)^2 \} .
 \end{aligned}$$

Al mismo orden del desarrollo en loops, el resto de las transformadas de Fourier de las funciones propias se reducen simplemente a menos los valores de las constantes de acoplamiento que aparecen en el Lagrangiano original. En nuestro caso, sólo tenemos la contribución de

$$(A.32) \quad \imath \tilde{\Gamma}_0^{(4)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -\imath \left(\frac{\lambda}{4!} \right) 4! = -\imath \lambda ,$$

de manera tal que

$$\begin{aligned}
 (A.33) \quad & \Gamma_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \\
 &= \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \cdots \int \frac{d^4k_4}{(2\pi)^4} e^{\imath(k_1 \cdot x_1 + \cdots + k_4 \cdot x_4)} (2\pi)^4 \delta(k_1 + \cdots + k_4) (-\lambda) = \\
 &= -\lambda \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \delta(x_1 - x_4) .
 \end{aligned}$$

Su contribución a $\Gamma[\varphi]$ es

$$\begin{aligned}
 (A.34) \quad & \frac{1}{4!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_4 \Gamma_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_4) = \\
 &= -\frac{\lambda}{4!} \int d^4x \varphi(x)^4 .
 \end{aligned}$$

En definitiva, la funcional $\Gamma[\varphi]$ al orden de 0-loops coincide con la acción clásica del campo,

$$(A.35) \quad \Gamma[\varphi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial \varphi(x))^2 - \frac{1}{2} \varphi(x)^2 - V(\varphi(x)) \right\} + \mathcal{O}(\hbar) ,$$

lo que justifica el nombre de *acción efectiva*.

En ese sentido, la relación

$$(A.36) \quad \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = -j(x)$$

puede ser entendida como una *ecuación efectiva de movimiento*, cuya solución determina la funcional $\varphi[j]$ (necesaria para calcular $\mathcal{W}[j]$ mediante la transformada de Legendre de la acción efectiva $\Gamma[\varphi]$).

Finalmente, dado que las funciones de Green conexas se construyen sumando las contribuciones de diagramas tipo árbol formados por propagadores completos y vértices propios, elementos que pueden ser derivados de la acción efectiva, concluimos que el conocimiento de la acción efectiva equivale a la resolución completa del problema del campo cuántico.

Bibliografía:

- R.P. Feynman y A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*.
- P. Ramond, *Field Theory: a modern primer*.
- L.D. Faddeev, *Introduction to Functional Methods*, Les Houches Lectures, 1975.